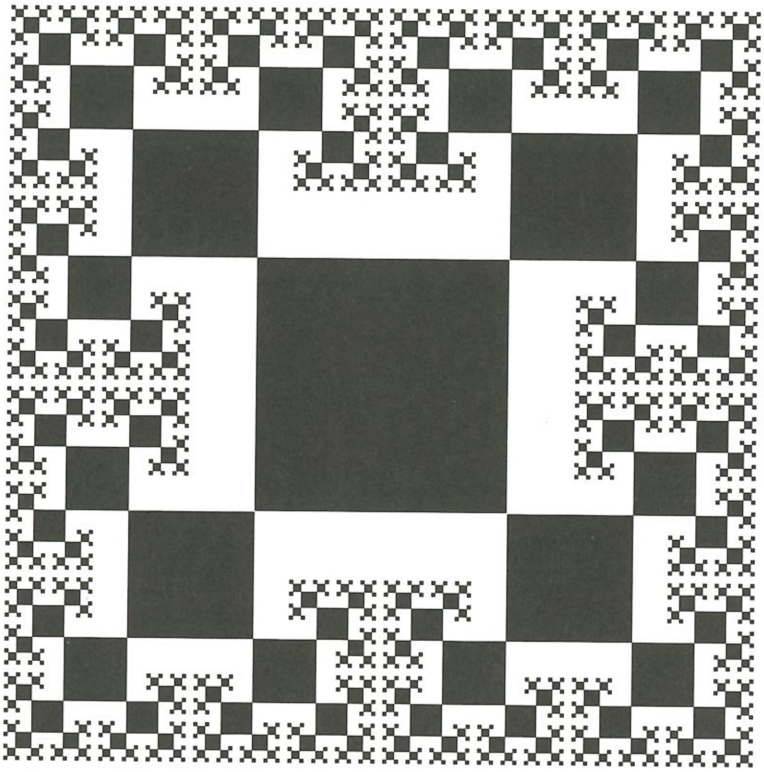
20 Fraktale Gebilde

Bei der Betrachtung der Küstenlinie einer Insel stösst man auf folgendes Problem: Je genauer man sie zeichnet, desto länger wird sie. Entsprechende Probleme ergeben sich bei der Darstellung der Oberfläche einer Wolke oder eines Schwammes. Eine mathematische Idealisierung führt auf so genannte *fraktale Gebilde.*



Quadrat-Fraktal

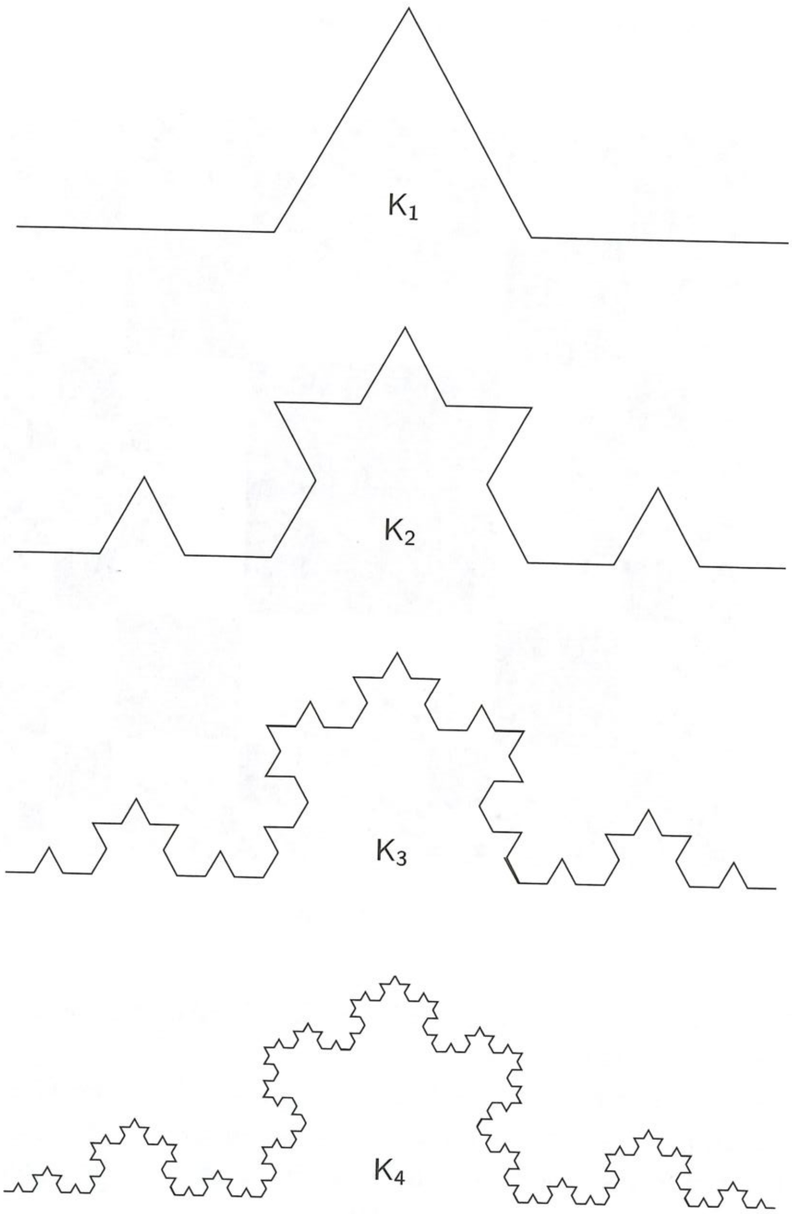
Kennzeichnend für fraktale Gebilde sind der rekursive Aufbau und zwei Eigenschaften, die in engem Zusammenhang stehen:

1. *Selbstähnlichkeit,* d. h. in jedem Teil finden wir die Form des Ganzen wieder.

   Diese Selbstähnlichkeit kann, muss aber nicht im strengen Sinn der geometrischen Ähnlichkeit aufgefasst werden. Eine Teilfigur kann auch die gleiche Struktur oder die gleiche Funktion wie das Ganze haben.
2. Glatte Begrenzungen treten nicht auf.

Beispiel für eine Selbstähnlichkeit im strengen Sinne:

K_1 besteht aus 4 gleich langen Strecken; der Winkel zwischen 2 benachbarten Strecken beträgt 60° oder 120°. Ersetzt man in K_1 jede Strecke durch einen zu K_1 ähnlichen Streckenzug, so erhält man K_2. Ersetzt man in K_n jede Strecke durch einen zu K_1 ähnlichen Streckenzug, so erhält man K_{n+1}. Die Grenzkurve K hat keine Länge. K heisst kochsche Kurve[1]. Das rekursive Aufbauprinzip führt zur Selbstähnlichkeit.



1 Der schwedische Mathematiker Helge von Koch publizierte diese Kurve 1906.

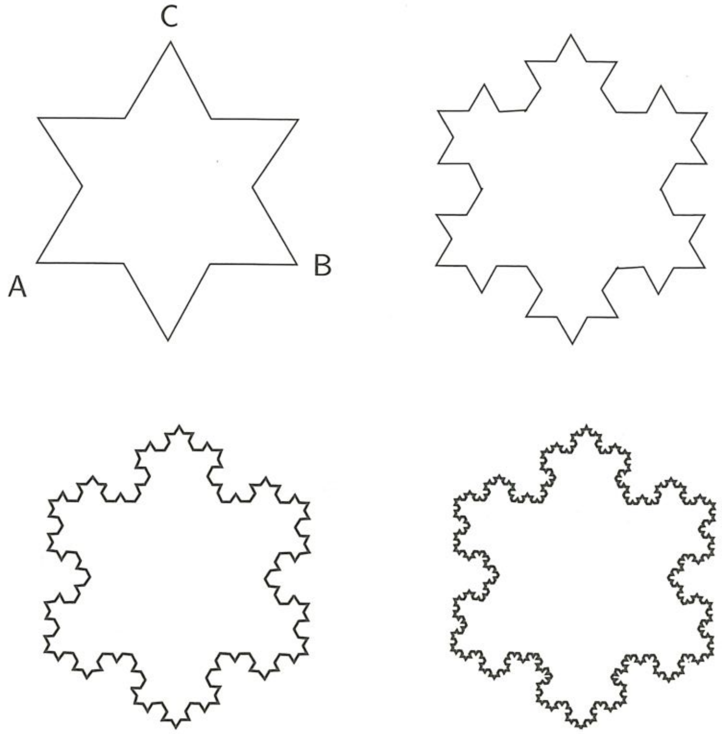
1 a) Aus wie vielen Strecken besteht K_{10}?

b) Die Kurve K_1 habe die Länge 12 cm. Welches ist das kleinste n, für das die Länge der Kurve K_n erstmals grösser als die Entfernung der Sonne von der Erde (150 Millionen Kilometer) wird?

c) Wähle in Gedanken zwei benachbarte Ecken in der Figur K_{100} aus. Wie lang ist der Weg zwischen ihnen auf der Grenzkurve?

d) K_1 hat 5 Ecken, K_2 deren 17. Wie viele Ecken von K_{10} sind auch Punkte der Grenzkurve?

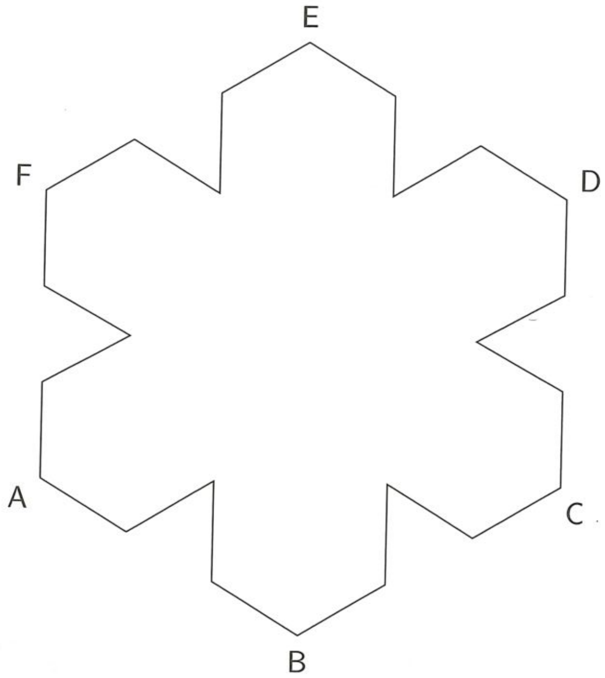
2 Die kochsche Insel ist eine Spielart der kochschen Kurve.



Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC beträgt 1. Berechne den Flächeninhalt der ganzen Insel.

3 Das gleichseitige Dreieck ACE mit dem Flächeninhalt 1 wird durch drei Ecken B, D, F so ergänzt, dass ein regelmässiges Sechseck entsteht. Analog zur vorangehenden Aufgabe werden an jede Seite der Figur kleine gleichseitige Dreiecke, allerdings nach innen, so angesetzt, dass die neue Figur von lauter gleich langen Strecken begrenzt ist.

Wiederholt man diesen Prozess beliebig oft, so erhält man überraschenderweise die gleiche Grenzkurve wie in Nr. 2.



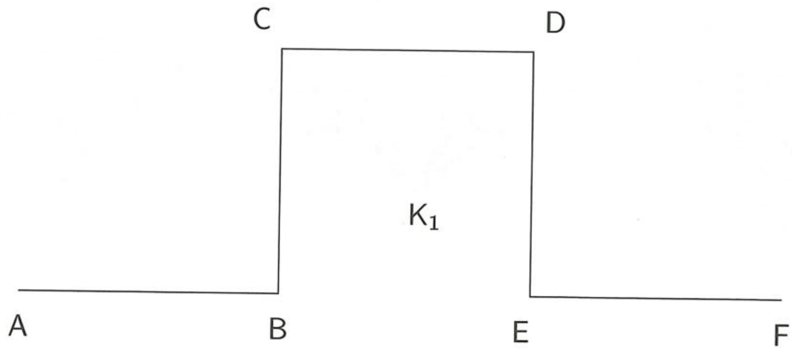
a) Zeige, dass der Flächeninhalt des von der Grenzkurve umschlossenen Gebietes der gleiche ist wie derjenige in Nr. 2.

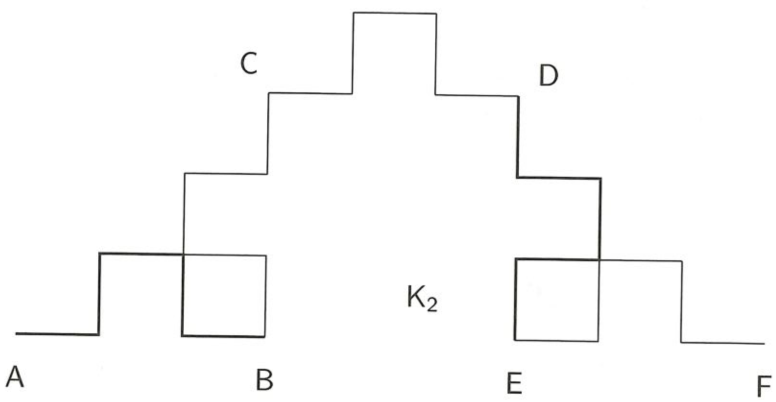
b) Zeige, dass die beiden Grenzkurven von Nr. 2 und Nr. 3 identisch sind.

4 Die Kurve K_1 sei 9 cm lang. K_{n+1} entsteht aus K_n, indem man jede Strecke von K_n durch einen zu K_1 ähnlichen Streckenzug ersetzt.

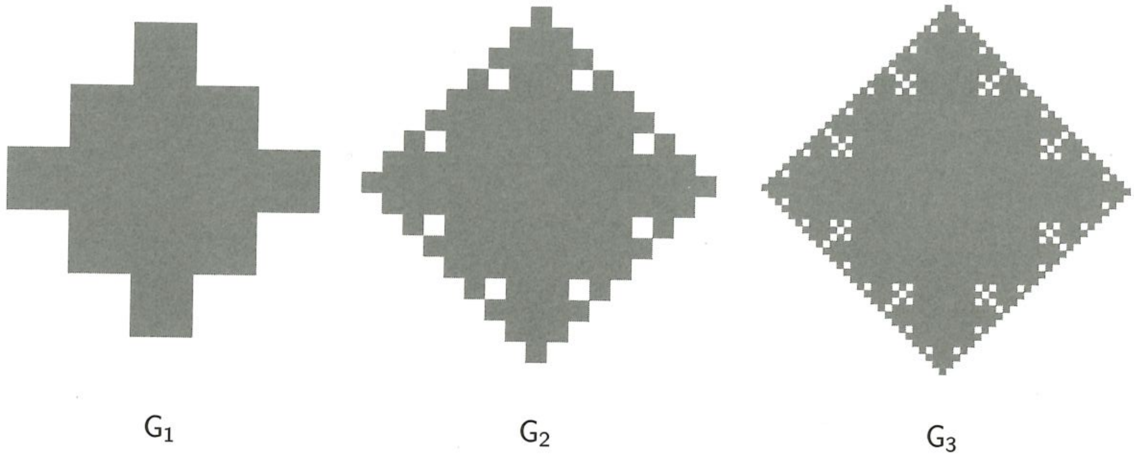
a) Wie lang sind K_2, K_3 und K_{20}?

b) Welches ist das kleinste n, für das die Kurve erstmals länger als der Äquator (40 000 km) wird?





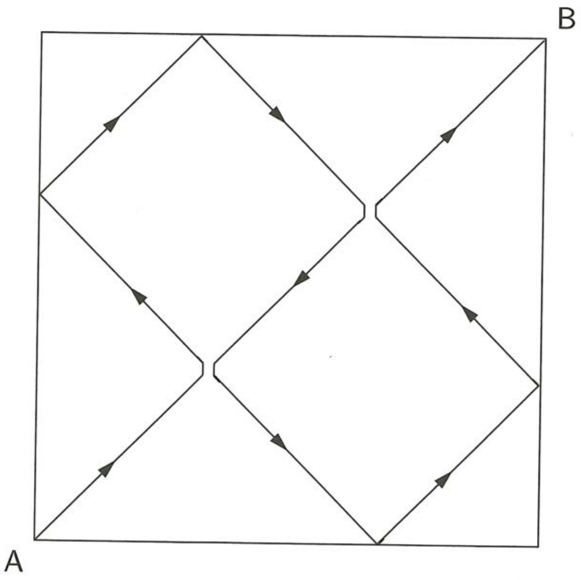
5 Je vier Streckenzüge von Nr. 4 bilden das Gebiet G_n. Für unbeschränkt wachsendes n entsteht im Grenzfall das Gebiet G.



Der Flächeninhalt von G_1 beträgt $1 + \frac{4}{9}$.

Berechne den Flächeninhalt von G_n und von G.

6 Peano[1]-Kurven sind flächendeckende Kurven, d. h., jeder Punkt des gegebenen Quadrates wird von der Grenzkurve erreicht.



P_1 führt von A nach B. P_{n+1} entsteht dadurch, dass man jede Strecke von P_n durch einen zu ganz P_1 ähnlichen Streckenzug ersetzt.

a) Berechne die Länge von P_n, wenn die Strecke AB 1 cm lang ist.

b) Für welches n übersteigt die Länge von P_n erstmals 1000 km?

---

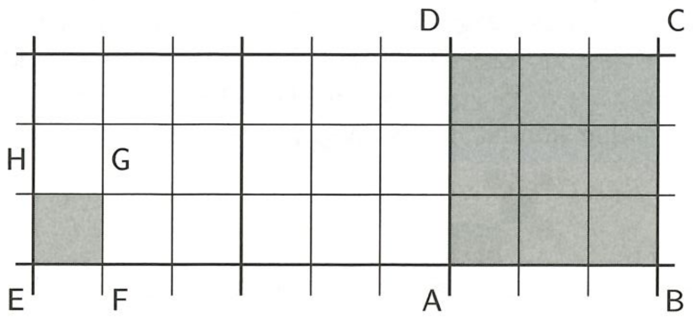
1 Giuseppe Peano (1858–1932), italienischer Mathematiker.

Zur Dimension eines Fraktals

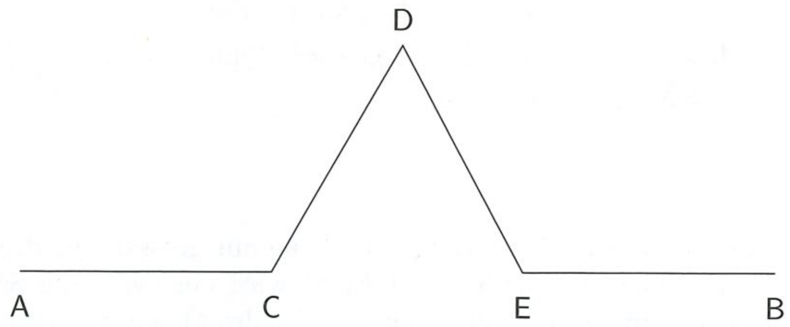
Die Dimension einer Strecke ist 1, die Dimension einer Fläche ist 2, die Dimension eines Körpers ist 3. Bei einer zentrischen Streckung mit dem Faktor k ($k > 0$)

- werden Längen mit dem Faktor k multipliziert,
- werden Flächeninhalte mit dem Faktor k^2 multipliziert,
- werden Volumina mit dem Faktor k^3 multipliziert,
- wird das Mass eines Objekts der Dimension d mit dem Faktor k^d multipliziert. (Allgemeine Formulierung)

Beispiel 1:
Beim Übergang von der Parkettierung der Ebene mit grossen Quadraten $ABCD$ zur Parkettierung mit kleinen Quadraten $EFGH$ wird einerseits die Seitenlänge jedes Quadrates durch 3 dividiert, andererseits wird jedes Quadrat durch 9 Quadrate ersetzt. Ist M das Mass (der Flächeninhalt) für ein kleines Quadrat, so ist $9\,M$ das Mass für ein grosses Quadrat. Es gilt: $M \cdot 3^d = 9 \cdot M \Rightarrow 3^d = 9 \Rightarrow$ die Dimension d der Ebene ist gleich 2.



Beispiel 2: Zur kochschen Kurve (siehe Nr. 1).
Beim Übergang von der Strecke AB zum Streckenzug $ACDEB$ wird einerseits jede Streckenlänge durch 3 dividiert, andererseits wird jede Strecke durch 4 Strecken ersetzt. Ist M das Mass (die Länge) für die Strecke AC, so ist $4\,M$ das Mass für den Streckenzug $ACDEB$. Es gilt: $M \cdot 3^d = 4 \cdot M \Rightarrow 3^d = 4 \Rightarrow$ die Dimension der kochschen Kurve ist gleich $d = \log(4) : \log(3) \approx 1.26$; diese Zahl ist irrational.



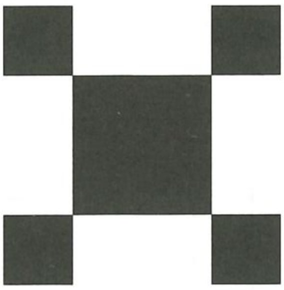
Die Dimension eines fraktalen Gebildes berechnet man somit nach folgender Überlegung: Beim Übergang von der n-ten zur $(n+1)$-ten Figur wird einerseits jede Streckenlänge durch p dividiert, andererseits wird jede Strecke (jedes Flächenstück, jeder Teilkörper) der n-ten Figur durch q Strecken (Flächenstücke, Teilkörper) der $(n+1)$-ten Figur ersetzt. Die Dimension d des fraktalen Gebildes erfüllt die Gleichung $p^d = q$. Somit ist $d = \log(q) : \log(p)$. Die Dimension d ist nicht unbedingt eine natürliche Zahl. Daher kommt der Name *fraktales Gebilde.*

7 Berechne die Dimension des fraktalen Gebildes in a) Nr. 4 b) Nr. 6.

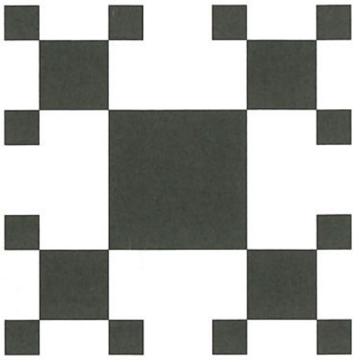
8 Setzt man an alle Ecken des Quadrates Q_0, dessen Seitenlänge 1 ist, ein Quadrat mit der Seitenlänge 0.5 an, so bilden die neuen Quadrate die Figur Q_1. Setzt man an alle freien Ecken von Q_1 ein Quadrat mit der Seitenlänge 0.5^2 an, so bilden wiederum die neuen Quadrate die Figur Q_2. Dieser Prozess werde in Gedanken beliebig fortgesetzt. Die Grenzfläche (Grenzkurve?) sei Q.

Entstehung dieses Quadrat-Fraktals:

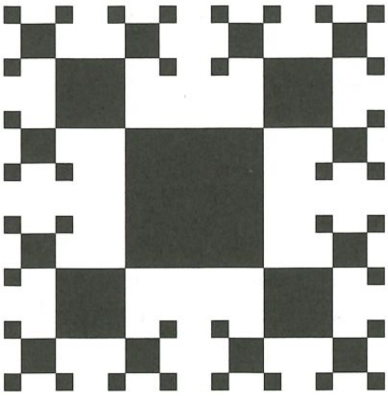
Q_0



Q_0 und Q_1



Q_0 und Q_1 und Q_2



Q_0 und Q_1 und Q_2 und Q_3

a) Berechne den Flächeninhalt aller Quadrate von Q_n.

b) Berechne den Flächeninhalt aller Quadrate.

c) Berechne die Dimension der Grenzfläche Q.

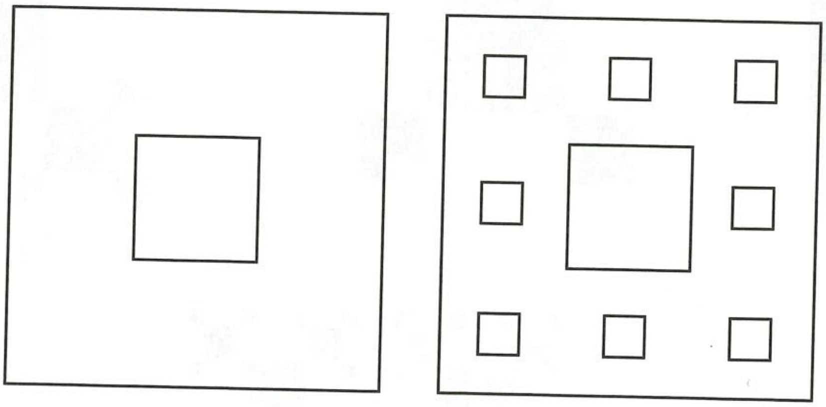
Zu 9, 10: Die beiden Aufgaben haben den Teppich von Sierpinski[1] zum Thema. Der Flächeninhalt des gegebenen Quadrates beträgt 1, das Neunfache des nächstfolgenden Quadrates. Die eingezeichneten Quadrate werden als Ränder von Löchern im Teppich interpretiert.

9 F_n ist die Fläche des Teppichs T_n.

a) Berechne F_1, F_2 und F_n.

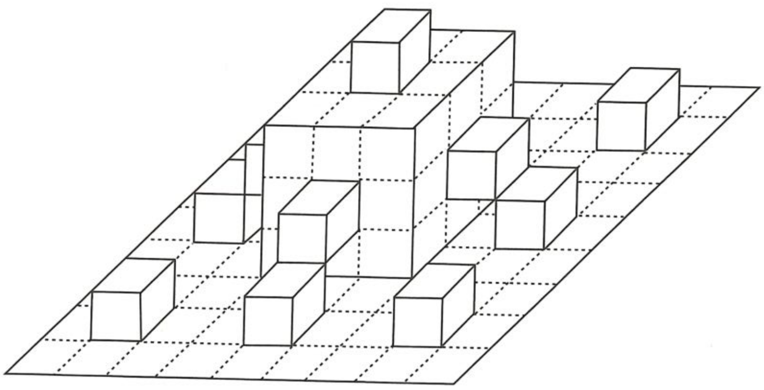
b) Berechne den Flächeninhalt der Grenzfläche F.

c) Berechne die Dimension der Grenzfläche F.



T_1 T_2

10 Auf das quadratische Loch des Teppichs T_1 (siehe Nr. 9) wird ein Würfel aufgesetzt. Die neue Fläche besteht aus 13 kongruenten Quadraten; sie werde F_1 genannt. Jedem dieser 13 Quadrate wird auf gleiche Weise wieder ein Würfel aufgesetzt; so erhält man F_2. F ist die Grenzfläche, welche bei unbeschränkter Fortsetzung dieses Prozesses entsteht. S_n ist der Flächeninhalt von F_n, V_n das Volumen des zu F_n gehörenden Körpers.



F_2

1 Sierpinski (1882–1969), polnischer Mathematiker.

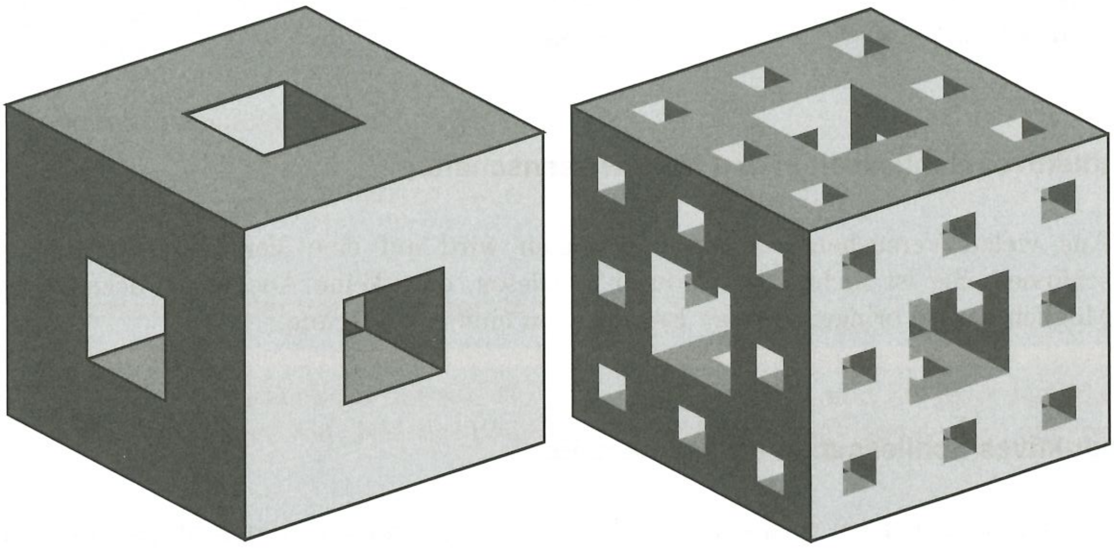
a) Zeichne F_1.

b) Berechne S_1, S_2 und S_n.

c) Berechne V_1, V_2 und das Volumen V des Grenzkörpers.

d) Berechne die Dimension von F.

11 Der Menger-Schwamm



S_1 S_2

In Gedanken zerlegt man einen Würfel mit der Kantenlänge 1 m in 27 kongruente Würfel und entfernt anschliessend diejenigen der kleineren Würfel, welche in den Flächenmitten des grossen Würfels liegen, sowie den im Zentrum liegenden Würfel. Der entstandene Körper S_2 hat somit das Volumen von 20 der kleineren Würfel. Setzt man diesen Prozess beliebig fort, entsteht im Grenzfall der Menger-Schwamm.

V_n ist das Volumen von S_n.

a) Berechne V_1, V_2 und V_n.

b) Gesucht ist das kleinste n, für welches V_n kleiner als $1\,\mathrm{mm}^3$ ist.

c) Berechne die Dimension des Menger-Schwammes.

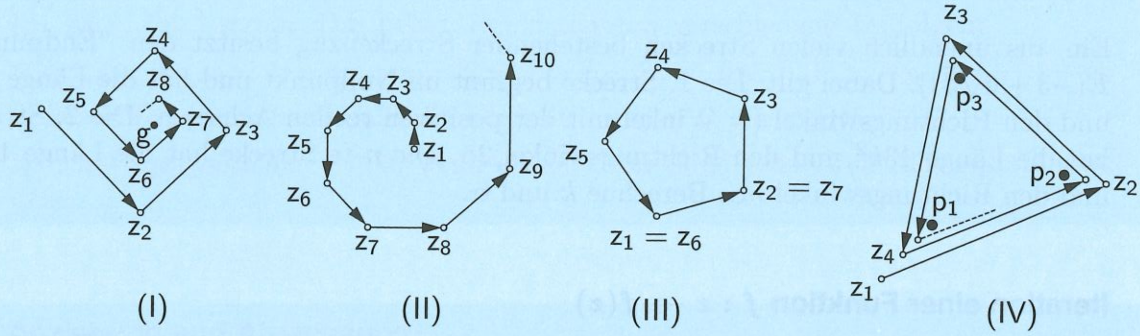
25 Komplexe Folgen

In den Aufgabentexten wird nicht immer unterschieden zwischen einer Zahl und dem entsprechenden Punkt in der Zahlenebene.

25.1 Einführung

Die graphische Darstellung einer Zahlenfolge $n \to z_n$ $(n \in \mathbb{N}, z_n \in \mathbb{C})$ stellt in der Zahlenebene eine Punktfolge dar.

Beispiele:



(I) Die Punktfolge *konvergiert* gegen den *Grenzpunkt* g.
Im Spezialfall $z_1 = z_2 = z_3 = \cdots = g$ heisst g *Fixpunkt*.
(II) Die Punktfolge *divergiert* gegen ∞.
(III) Die Punktfolge ist ein *Zyklus* mit 5 *periodischen Punkten.*
(IV) Die Punktfolge strebt gegen einen Zyklus mit 3 periodischen Punkten.

Zu 1 – 3: Berechne die verlangten Zahlen, zeichne die Punkte und beschreibe das Verhalten der Punktfolge.

1 Für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

a) $z_1 = \mathrm{i}, \quad z_{n+1} = z_n + 1 + \frac{1}{2}\,\mathrm{i}$ b) $z_n = -6 + 6\,\mathrm{i} + \frac{12}{n} - \frac{12}{n}\,\mathrm{i}$

2 Für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

a) $z_n = 1 + (0.9 \operatorname{cis} 20^\circ)^n$ b) $z_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdot \mathrm{i}^n$

3 Geometrische Folge mit dem Anfangsglied $z_1 = 1$ und dem Quotienten q für $n = 1, 2, 3, \ldots, 12$.

a) $q = 1 + \mathrm{i}$ b) $q = \operatorname{cis} 60°$ c) $q = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$

Zu 4, 5: Geometrische Folge (z_n) und zugehörige geometrische Reihe (s_n).

a) Berechne den Quotienten q der geometrischen Folge und das n-te Glied z_n.

b) Berechne die Teilsumme $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k$ und den Grenzwert $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

c) Berechne von den Folgen (z_n) und (s_n) die Glieder für $n = 1, 2, \ldots, 6$, zeichne die Punkte und beschreibe das Verhalten der Punktfolgen.

4 $z_1 = 8\,\mathrm{i}$, $z_2 = -4 + 4\,\mathrm{i}$

5 $z_2 = 4\,\mathrm{i}$, $s_2 = 5 + 4\,\mathrm{i}$

6 Ein aus unendlich vielen Strecken bestehender Streckenzug besitzt den "Endpunkt" $E(-3 + 6\sqrt{3}\,\mathrm{i})$. Dabei gilt: Die 1. Strecke beginnt im Nullpunkt und hat die Länge $13k$ und den Richtungswinkel (= Winkel mit der positiven reellen Achse) α. Die 2. Strecke hat die Länge $13k^2$ und den Richtungswinkel 2α. Die n-te Strecke hat die Länge $13k^n$ und den Richtungswinkel $n\alpha$. Berechne k und α.

Iteration einer Funktion $f : z \to f(z)$

$$z_1 \xrightarrow{f} z_2 \xrightarrow{f} z_3 \xrightarrow{f} \cdots z_n \xrightarrow{f} z_{n+1} = f(z_n)$$

Die Menge $\{z_1, z_2, z_3, \ldots\}$ bezeichnet man als Bahn des Punkts z_1.

Zu 7 – 11: Berechne z_2, z_5 und z_n.

7 $f(z) = z + 1 + 3\,\mathrm{i}$ a) $z_1 = 0$ b) $z_1 = -1 + \mathrm{i}$

8 $f(z) = (1 + 2\,\mathrm{i})z$ a) $z_1 = 1$ b) $z_1 = 1 + \mathrm{i}$

9 $f(z) = 2z + 1$ a) $z_1 = 1$ b) $z_1 = \mathrm{i}$

10 $f(z) = (1 + \mathrm{i})z + 2\,\mathrm{i}$ a) $z_1 = 1$ b) $z_1 = 2 - \mathrm{i}$

11 $f(z) = \dfrac{3 + z}{1 - z}$ a) $z_1 = 2$ b) $z_1 = 3\,\mathrm{i}$

25.2 Iteration der Funktion $z \to z^2 + c$

Gegeben ist der Parameter $c \in \mathbb{C}$ der Funktion $z \to z^2 + c$. Für jeden Punkt $z_1 \in \mathbb{C}$ betrachten wir die durch Iteration entstehende Zahlenfolge (z_n) mit dem Anfangsglied z_1.

Charakterisierung der Punkte z_1

z_1 heisst *Fixpunkt,* wenn $z_2 = z_1$ gilt. Dann folgt für alle $n \in \mathbb{N}$: $z_n = z_1$.

z_1 heisst *periodischer Punkt*, wenn es eine kleinste natürliche Zahl $n > 1$ gibt, für die $z_{n+1} = z_1$ gilt. Die Menge $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ heisst Zyklus mit der Länge n.

z_1 heisst *Vorfixpunkt*, wenn es eine kleinste natürliche Zahl $m > 1$ gibt, sodass z_m ein Fixpunkt ist.

z_1 heisst *vorperiodischer Punkt*, wenn es eine kleinste natürliche Zahl $m > 1$ gibt, sodass z_m periodischer Punkt ist.

z_1 heisst *asymptotischer Fixpunkt*, wenn die Folge (z_n) gegen einen Fixpunkt g strebt.

z_1 heisst *asymptotisch periodischer Punkt*, wenn die Folge (z_n) gegen einen Zyklus $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ strebt. Das heisst, es existieren n verschiedene Teilfolgen:

$z_1,\ z_{n+1},\ z_{2n+1}, \ldots \to p_1,\quad z_2,\ z_{n+2},\ z_{2n+2}, \ldots \to p_2,\quad \ldots,\quad z_n, z_{2n}, z_{3n}, \ldots \to p_n$

z_1 heisst *Divergenzpunkt*, falls die Folge (z_n) gegen ∞ divergiert.

z_1 heisst *aperiodischer Punkt*, wenn er keine der oben genannten Eigenschaften aufweist.

Anziehung und Abstossung[1]

Ein *Fixpunkt* z heisst *anziehend,* wenn alle Folgen mit hinreichend nahe bei z liegenden Startpunkten z_1 gegen z als Grenzpunkt streben. Ein Fixpunkt z heisst *abstossend,* wenn es beliebig nahe bei z beginnende Folgen gibt, die nicht gegen z streben. *Anziehende periodische Punkte* und *abstossende periodische Punkte* werden analog definiert.
Für jedes feste $c \in \mathbb{C}$ gilt[2]: Es existiert höchstens ein anziehender Fixpunkt oder anziehender Zyklus.

1 In den Nummern 43c, 44c, 45c und 46c wird auf die schwierige Situation mit "indifferenten" (neutralen) Fixpunkten hingewiesen.
2 Ohne Beweis.

Zerlegung der Zahlenebene

D_c *Divergenzbereich* = Menge aller Divergenzpunkte

Für jedes $c \in \mathbb{C}$ gilt: Das Äussere des Kreises $|z| = \max(|c|, 2)$ ist Teilmenge von D_c. (Vgl. Nr. 12)

E_c *Einzugsbereich* = Menge, die aus dem anziehenden Fixpunkt und den zugehörigen asymptotischen Fixpunkten oder dem anziehenden Zyklus und den zugehörigen asymptotisch periodischen Punkten besteht.

Für jedes feste $c \in \mathbb{C}$ gilt[1]: Existiert ein anziehender Zyklus, so liegt der Punkt 0 (der so genannte "kritische Punkt") in E_c.

J_c *Juliamenge*[2] = $\mathbb{C} \setminus (D_c \cup E_c)$ = "Randmenge" zwischen D_c und E_c.

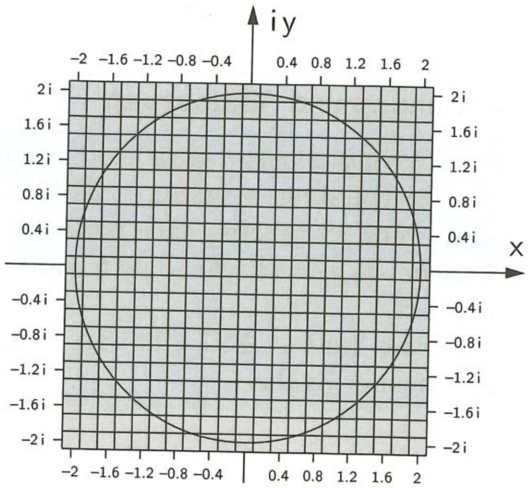
J_c besteht aus allen abstossenden periodischen Punkten, den zugehörigen vorperiodischen Punkten und allen aperiodischen Punkten. Für jedes $c \in \mathbb{C}$ bildet die Funktion $z \to z^2 + c$ und die Juliamenge J_c ein dynamisches System mit chaotischen Eigenschaften. (Vgl. Nr. 23–28)

Die Mengen D_c, E_c und J_c sind (ausser für $c = 0$ oder $c = -2$) Fraktale.

12 Beweise: Falls $|z_1| \geq |c|$ und $|z_1| > 2$ gilt, ist z_1 für die Iteration $z \to z^2 + c$ ein Divergenzpunkt.
Hinweis: Benütze die Dreiecksungleichung $|a + b| \geq |a| - |b|$.

13 a) Näherungsweises Zeichnen des Einzugsbereichs $E_{-0.5+0.5\,\mathrm{i}}$. Färbe ein Quadrätchen schwarz, wenn für seinen Mittelpunkt z_1 gilt: In der durch die Iteration der Funktion $z \to z^2 - 0.5 + 0.5\,\mathrm{i}$ entstehenden Folge (z_n) mit dem Anfangsglied z_1 liegt das 10. Glied z_{10} innerhalb des Kreises $|z| = 2$.

Bemerkung: Die Zeichnungen dieses Kapitels wurden mit einem Computer auf einem wesentlich feineren Quadratraster und der Verwendung des 100. (statt des 10.) Glieds hergestellt.



b) Beweise: Der Einzugsbereich ist punktsymmetrisch.

1 Ohne Beweis.
2 Gaston Julia (1893–1978), französischer Mathematiker.

Iteration der Funktion $z \to z^2$

In den zu dieser Funktion gehörenden Nummern 14 bis 28 wird die Funktionsgleichung jeweils nicht speziell erwähnt.

14 Charakterisiere den Punkt z_1.
a) $z_1 = \mathrm{i}$ b) $z_1 = 1$ c) $z_1 = 0$ d) $z_1 = \operatorname{cis} 40°$
e) $z_1 = \frac{1}{2}$ f) $z_1 = 2$

15 Charakterisiere den Punkt z_1.
a) $z_1 = \operatorname{cis} 45°$ b) $z_1 = \operatorname{cis} 120°$ c) $z_1 = \operatorname{cis} 144°$ d) $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{i}$
e) $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ f) $z_1 = \operatorname{cis} \sqrt{2}°$

16 Beschreibe die Mengen E_0, D_0 und J_0.

17 Charakterisiere die in der Umgebung des Fixpunkts 0 liegenden Punkte z_1 und entscheide, ob er anziehend oder abstossend ist.
a) $z_1 = 0.1$ b) $z_1 = -0.1$ c) $z_1 = 0.1\,\mathrm{i}$ d) $z_1 = -0.1\,\mathrm{i}$

18 Ebenso für den Fixpunkt 1.
a) $z_1 = 0.9$ b) $z_1 = 1.1$ c) $z_1 = 1 + 0.1\,\mathrm{i}$ d) $z_1 = \operatorname{cis} 1°$

19 Berechne zum Fixpunkt 1 den Vorfixpunkt z_1, für den gilt:
a) $z_1 \neq z_2 = 1$ b) $z_1 \neq z_2 \neq z_3 = 1$ c) $z_1 \neq z_2 \neq z_3 \neq z_4 = 1$

20 a) Berechne den Zyklus $\{p_1, p_2\}$ mit der Länge 2.
b) Berechne zu jedem in a) gefundenen periodischen Punkt p die vorperiodischen Punkte $z_1 \neq p$, für die gilt: $z_1 \neq z_2 = p$.

21 Berechne die Zyklen mit der Länge a) 3 b) 4 c) 5

22 Charakterisiere die in der Umgebung des periodischen Punkts $\operatorname{cis} 120°$ liegenden Punkte z_1 und entscheide, ob z_1 anziehend oder abstossend ist.
a) $z_1 = 0.9 \operatorname{cis} 120°$ b) $z_1 = 1.1 \operatorname{cis} 120°$ c) $z_1 = \operatorname{cis} 123.25°$

Deterministisches Chaos auf der Juliamenge J_0

Wir ordnen dem Einheitskreis das Einheitsintervall $I = [0, 1[$ zu.

$z = \text{cis}(x \cdot 360°) \to x \in I$, also beispielsweise $\text{cis}\, 180° \to \frac{1}{2}$, $\text{cis}\, 288° \to \frac{4}{5}$. Für die Zahlen x des Intervalls I ist die Schreibweise im Zweiersystem besonders günstig, da der Winkelverdoppelung auf dem Einheitskreis die folgende Regel entspricht: Schiebe den Dualpunkt (analog Dezimalpunkt) um eine Stelle nach rechts und schreibe vor dem Punkt immer eine Null.

Transitivität: (vgl. Nrn. 24 und 25) Von jedem (beliebig kleinen) Intervall werden die Punkte im Laufe der Iteration beliebig fein über das ganze Intervall I verstreut. Es gilt: Zu einem beliebigen Startintervall $I_1 \subset I$ und einem beliebigen Zielintervall $I_2 \subset I$ können immer Startwerte $x_1 \in I_1$ gefunden werden, die im Laufe der Iteration (mindestens) einmal ins Intervall I_2 fallen.

Sensitivität: (vgl. Nrn. 26 und 27) Eine beliebig kleine Abweichung bei den Anfangswerten kann im Laufe der Iteration zu beliebig stark verschiedenen Werten innerhalb des Intervalls I führen. Es gilt: Zu einem gegebenen Anfangswert lässt sich in beliebiger Nähe immer ein anderer Punkt so finden, dass im Laufe der Iteration die Distanz (mindestens) einmal $\frac{1}{2}$ beträgt.

Periodizität: (vgl. Nr. 28) Jedes (beliebig kleine) Intervall enthält periodische Punkte.

Zu 23 – 28:

Wir zerlegen I in die acht Teilintervalle 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111

0.000 . . .	0.001 . . .	0.010 . . .	0.011 . . .	0.100 . . .	0.101 . . .	0.110 . . .	0.111 . . .

23 Gib die Glieder x_2, x_3 und x_4 im Zweier- und im Zehnersystem an.

a) $x_1 = 0.011\ (2)$ b) $x_1 = 0.1011\ (2)$ c) $x_1 = 0.0100111\ (2)$
d) $x_1 = 0.0\overline{10}\ (2)$ e) $x_1 = 0.10\overline{110}\ (2)$ f) $x_1 = 0.\overline{0110}\ (2)$

24 Gib für jedes der acht Teilintervalle 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 die Nummer des ersten Glieds der Folge an, das in dieses Teilintervall fällt.

a) $x_1 = 0.10111\ (2)$ b) $x_1 = 0.010100111\ (2)$ c) $x_1 = 0.\overline{1001}\ (2)$
d) $x_1 = 0.\overline{0100111}\ (2)$ e) $x_1 = 0.0\,1\,00\,01\,10\,11\,000\,001\,010\,011\,100\ldots$

25 Gib einen im Intervall I_1 liegenden Startwert x_1 an, sodass das n-te Glied der Folge im Intervall I_2 liegt.

a) $I_1 : 111,\quad I_2 : 101,\quad n = 3$ b) $I_1 : 010,\quad I_2 : 111,\quad n = 4$

26 Unter der Distanz von x und y verstehen wir $|x - y|$. Gib die Distanz von x_1 und y_1, von x_2 und y_2, von x_3 und y_3, von x_4 und y_4 an.

a) $x_1 = 0.1010\ (2), \quad y_1 = 0.1011\ (2)$ b) $x_1 = 0.\overline{01}\ (2), \quad y_1 = 0.\overline{110}\ (2)$

27 Gib zur Zahl $x_1 = 0.110\overline{10}\ (2)$ eine im Intervall 110 liegende Zahl y_1 an, sodass die Distanz $\frac{1}{2}$ beträgt

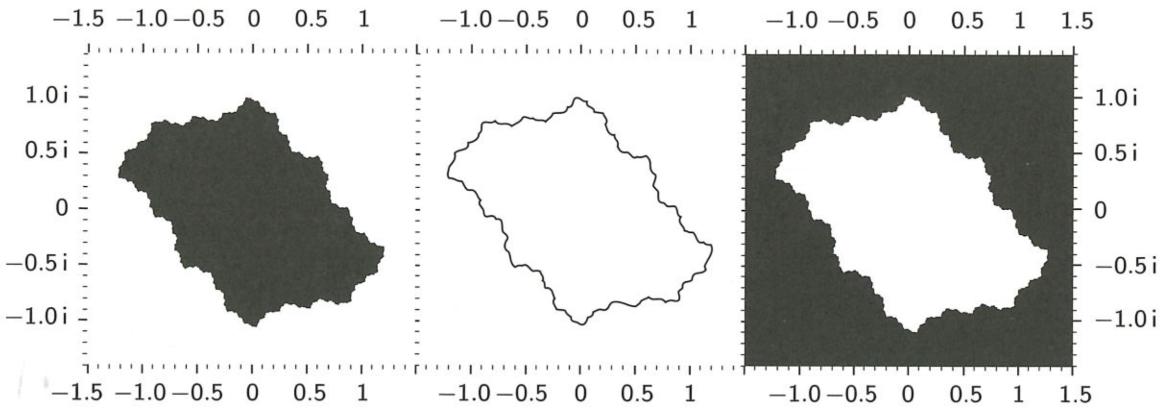
a) von x_4 und y_4. b) von x_5 und y_5.

28 Gib einen im Intervall I_1 liegenden periodischen Punkt x_1 mit der Periodenlänge n an.

a) $I_1 : 001, \quad n = 3$ b) $I_1 : 001, \quad n = 4$ c) $I_1 : 101, \quad n = 6$

Iteration der Funktion $z \to z^2 - 0.15 + 0.42\,\mathrm{i}$

In den zu dieser Funktion gehörenden Nummern 29 bis 31 wird die Funktionsgleichung jeweils nicht speziell erwähnt.



$E_{-0.15+0.42\,\mathrm{i}}$ $J_{-0.15+0.42\,\mathrm{i}}$ $D_{-0.15+0.42\,\mathrm{i}}$

29 a) Berechne die Fixpunkte z_1.

b) Sind die in a) gefundenen Fixpunkte anziehend oder abstossend? Untersuche dazu die Punkte $z^* = z_1 + 0.001$, $z^{**} = z_1 - 0.001$, $z^{***} = z_1 + 0.001\,\mathrm{i}$ und $z^{****} = z_1 - 0.001\,\mathrm{i}$.

30 a) Berechne den Zyklus der Länge 2.

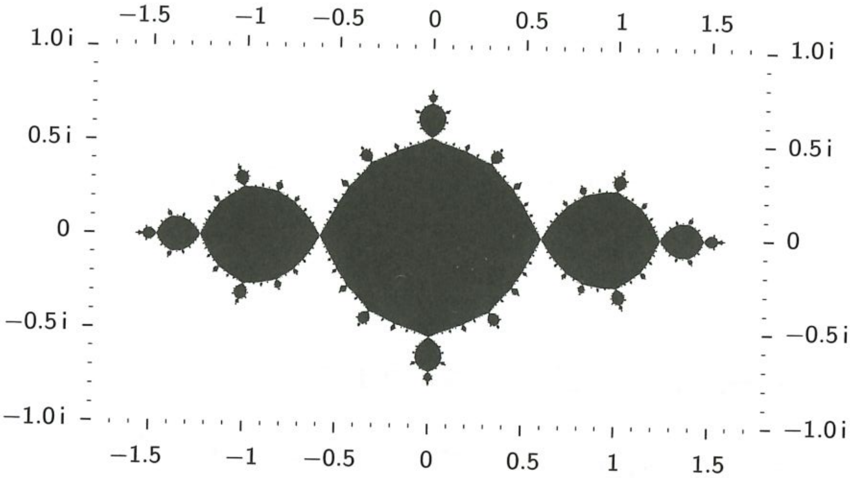
b) Sind die in a) gefundenen periodischen Punkte anziehend oder abstossend?

31 Entscheide, ob die Folge mit dem Anfangspunkt z_1 gegen einen Grenzpunkt strebt. Gib gegebenenfalls die Nummer des ersten Glieds der Folge an, dessen Real- und dessen Imaginärteil auf drei Ziffern nach dem Dezimalpunkt gerundet mit dem anziehenden Fixpunkt übereinstimmen.

a) $z_1 = 0$ b) $z_1 = 0.5$ c) $z_1 = \mathrm{i}$ d) $z_1 = 1 + \mathrm{i}$

Iteration der Funktion $z \to z^2 - 0.96$

In den zu dieser Funktion gehörenden Nummern 32 bis 37 wird die Funktionsgleichung jeweils nicht speziell erwähnt.



$E_{-0.96}$

32 Charakterisiere den Punkt z_1.

a) $z_1 = 0$ b) $z_1 = 0.5$ c) $z_1 = 1.5 + 0.1\,\mathrm{i}$ d) $z_1 = \frac{1}{2}\,\mathrm{i}$

33 Die Zahlentabellen enthalten alle Zyklen der Länge 1, 2, 3 und 4.

n	z_n
1	1.6
2	1.6

n	z_n
1	−0.6
2	−0.6

n	z_n
1	−0.9583
1	−0.0417
3	−0.9583

n	z_n
1	−1.4024 + 0.1206 i
2	0.9923 − 0.3382 i
3	−0.0898 − 0.6712 i
4	−1.4024 + 0.1206 i

n	z_n
1	−1.4024 − 0.1206 i
2	0.9923 + 0.3382 i
3	−0.0898 + 0.6712 i
4	−1.4024 − 0.1206 i

n	z_n
1	−1.5427 − 0.0422 i
2	1.4180 + 0.1303 i
3	1.0338 + 0.3694 i
4	−0.0276 − 0.7638 i
5	−1.5427 − 0.0422 i

n	z_n
1	−1.5427 + 0.0422 i
2	1.4180 − 0.1303 i
3	1.0338 − 0.3694 i
4	−0.0276 − 0.7638 i
5	−1.5427 + 0.0422 i

n	z_n
1	−1.1073 − 0.2011 i
2	0.2258 + 0.4453 i
3	−1.1073 − 0.2011 i
4	0.2258 − 0.4453 i
5	−1.1073 − 0.2011 i

Für wie viele Zahlen z_1 gilt die Bedingung?

a) $z_1 = z_2$ b) $z_1 = z_3$ c) $z_1 = z_4$ d) $z_1 = z_5$ e) $z_1 = z_6$

34 Wie viele Zyklen gibt es mit der Länge
a) 1? b) 2? c) 3? d) 4? e) 5?

35 $p_1 = -1.5154975 + 0.0357296\,i$ ist ein periodischer Punkt. Wie lang ist der zugehörige Zyklus, und welches sind die übrigen periodischen Punkte (Normalform, 4 Ziffern nach dem Dezimalpunkt) dieses Zyklus?

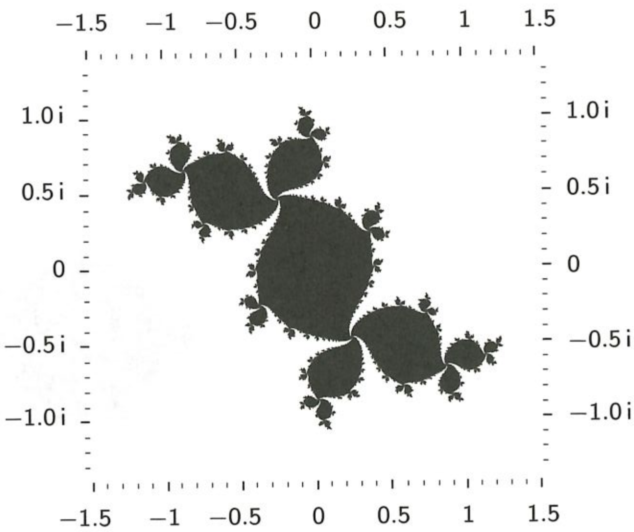
36 Wie vielen verschiedenen Zyklen gehören die vier periodischen Punkte an?
$p_1 = 0.0492 + 0.7081\,i$, $q_1 = -1.5825 - 0.0136\,i$,
$r_1 = -1.4590 + 0.0696\,i$, $s_1 = -1.5825 + 0.0136\,i$

37 Gib vom anziehenden Zyklus die Länge und die periodischen Punkte an.

Iteration der Funktion $z \to z^2 - 0.1 + 0.7\,i$

In den zu dieser Funktion gehörenden Nummern 38 bis 40 wird die Funktionsgleichung jeweils nicht speziell erwähnt.

38 Die Funktion besitzt einen anziehenden 3er-Zyklus. Ermittle diese drei anziehenden periodischen Punkte mit 4 Ziffern nach dem Dezimalpunkt.



$E_{-0.1+0.7\,i}$

39 Jeder der in Nr. 38 gefundenen anziehenden periodischen Punkte liegt in einem "Blatt". Das Blatt, das vom gemeinsamen Blattansatzpunkt aus etwa in 60°-Richtung bzw. 180°-Richtung bzw. 300°-Richtung liegt, nennen wir B_1 bzw. B_2 bzw. B_3. Bestimme für jedes dieser Blätter das erste Glied, das in ihm liegt.
a) $z_1 = 0.5 - 0.5\,i$ b) $z_1 = 1 - 0.6\,i$ c) $z_1 = 1.2 - 0.55\,i$
d) $z_1 = 1.18 - 0.62\,i$ e) $z_1 = -0.09 + 1.08\,i$

40 $z = 0.020873537 - 1.060942575\,i$ ist eine Lösung der Gleichung 8. Grades in z für $c = -0.1 + 0.7\,i$ $((z^2+c)^2+c)^2+c-z = 0$. Gib die übrigen Lösungen dieser Gleichung an (4 Ziffern nach dem Dezimalpunkt).

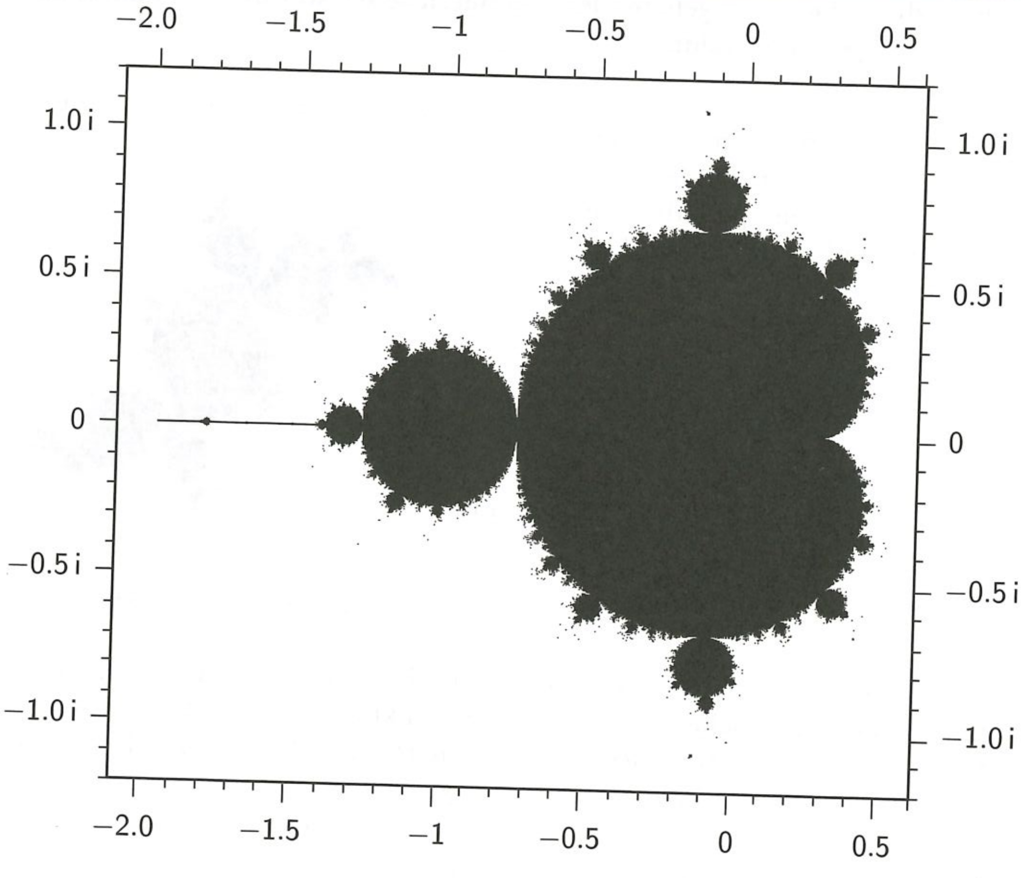
Die Mandelbrotmenge M[1]

Gegeben ist der feste Anfangspunkt $z_1 = 0$ (der so genannte "kritische Punkt"[2]). Für jeden Parameter $c \in \mathbb{C}$ betrachten wir die durch Iteration der Funktion $z \to z^2 + c$ entstehende Zahlenfolge (z_n).

M ist die Menge aller Parameter $c \in \mathbb{C}$, für welche die Folge (z_n) nicht nach ∞ divergiert.

Einige Eigenschaften von M[3]:

M ist ein Fraktal; d. h., es gibt beliebig kleine Ausschnitte von M, welche bei genügender Vergrösserung wieder die Menge M ergeben. M ist zusammenhängend. M besteht aus unendlich vielen gleichartigen, selbstähnlichen Teilen. Ein solcher Teil besteht aus einer Herzkurve (Cardioide), an der unendlich viele Kreise angehängt sind. Ferner gehören linienartige "Antennen" und "Fäden" zu M, welche diese Teile verbinden. Während das Innere der Herzkurve und der Kreise völlig ausgefüllt ist, besteht der Rand aus unbegrenzt vielen, äusserst reichhaltigen Formen.



1 Benoit Mandelbrot, geb. 1924 in Polen, Mathematikprofessor in Frankreich und den USA.
2 Stelle, an der die Ableitung der Funktion 0 ist.
3 Ohne Beweis.

Zu 41 – 47: Charakterisiere den Punkt 0 bezüglich der Iteration $z \to z^2 + c$. Beschreibe die Lage von c bezüglich der Mandelbrotmenge.

41 a) $c = 0.2$ b) $c = 0.3$ c) $c = 0.5\,\mathrm{i}$
d) $c = \mathrm{i}$ e) $c = 1.2\,\mathrm{i}$

42 a) $c = -1$ b) $c = -1.1 + 0.1\,\mathrm{i}$ c) $c = -0.9 + 0.2\,\mathrm{i}$
d) $c = -0.8 + 0.5\,\mathrm{i}$

43 a) $c = -\frac{1}{8} + \frac{27}{80}\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ b) $c = -\frac{1}{8} + \frac{33}{80}\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ c*) $c = -\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

44 a) $c = 0.3 + \frac{\sqrt{3}}{8}\,\mathrm{i}$ b) $c = 0.4 + \frac{\sqrt{3}}{8}\,\mathrm{i}$ c*) $c = 0.375 + \frac{\sqrt{3}}{8}\,\mathrm{i}$

45 a) $c = -0.7$ b) $c = -0.8$ c*) $c = -0.75$

46 a) $c = -1.2$ b) $c = -1.3$ c*) $c = -1.25$

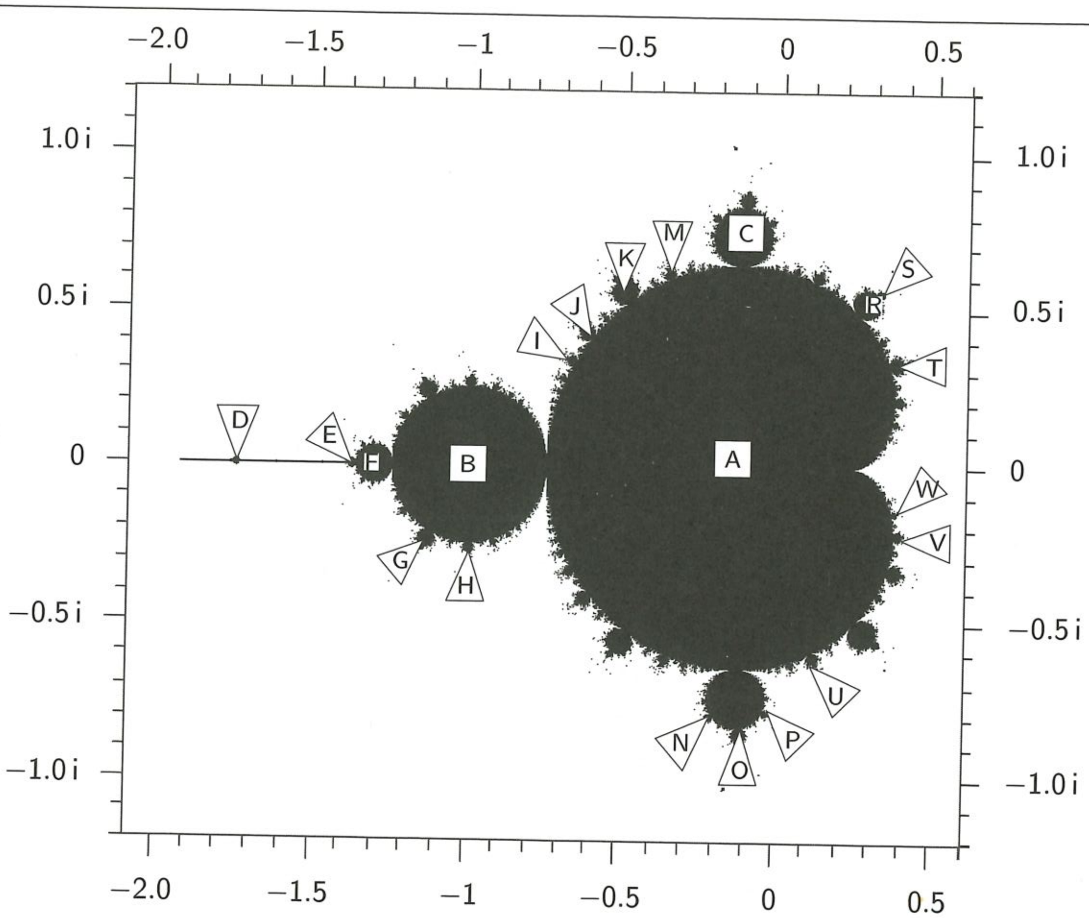
47 a) $c = -1.38$ b) $c = -1.395$ c) $c = -1.3995$

48 Berechne den Parameter c der Iteration $z \to z^2 + c$, wenn z_1 ein Fixpunkt ist.
a) $z_1 = \frac{1}{2}\operatorname{cis}\pi$ b) $z_1 = \frac{1}{2}\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$ c) $z_1 = \frac{1}{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}$

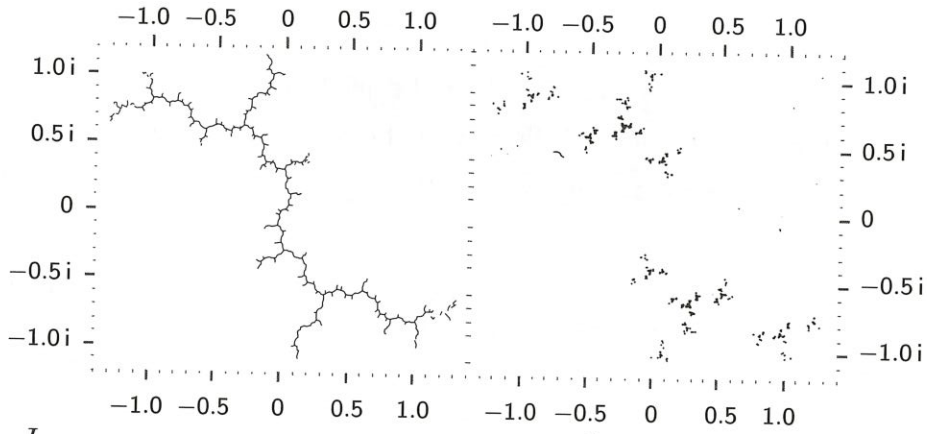
49 a) Berechne c, wenn $z_1 = \frac{1}{2}\operatorname{cis}\varphi$ ein Fixpunkt der Iteration $z \to z^2 + c$ ist.
b) Skizziere die Kurve, auf der sich die c-Werte bewegen, wenn sich der Fixpunkt auf dem Kreis $z_1 = \frac{1}{2}\operatorname{cis}\varphi$ bewegt. Benütze $\varphi = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \ldots, \frac{11\pi}{6}, 2\pi$. ($1 \mathrel{\widehat{=}} 10$ Häuschen)

50 Für alle c-Werte, die einer bestimmten Herzkurve oder einem bestimmten Kreis angehören, streben die Folgen mit dem Anfangspunkt $z_1 = 0$ gegen Zyklen mit derselben Länge n. Bestimme diese Anzahl n für die Herzkurve A und die Kreise $B, C, \ldots, W$.

Dabei kann ein beliebiger, zum verlangten Gebiet gehörender und durch sorgfältiges Messen in der Figur auf Seite 80 bestimmter c-Wert als Parameter der Funktion $z \to z^2 + c$ verwendet werden.



51 *Zusammenhang zwischen der Lage eines Punkts c bezüglich der Mandelbrotmenge und der zugehörigen Juliamenge J_c*



J_i $J_{0.1+i}$

Für $c = i$ und für $c = 0.1 + i$ sind die Einzugsbereiche leer. Während J_i linienartig und zusammenhängend ist, zerfällt $J_{0.1+i}$ in einzelne Punkte und ist total unzusammenhängend.

Wie liegen die beiden Parameterwerte c bezüglich der Mandelbrotmenge? Gib eine Vermutung an.