Ergänzungen zur Quantenphysik

# Das Aktionsprinzip als Differentialgleichung

## 1 Die Ortsfunktion $\vec{r}(t)$ resp. $x(t)$

**Zielsetzung der klassischen Mechanik:** Die **klassische (= Newton'sche) Mechanik** soll in der Lage sein den weiteren **Bewegungsablauf eines Körpers** aufgrund des **aktuellen Bewegungszustandes** und der Kenntnis über die verschiedenen auf den Körper wirkenden **Kräfte** vorherzusagen.

Die **Newton'schen Axiome (= Grundgesetze der Mechanik)** geben darüber Auskunft, wie das Zusammenspiel der Kräfte funktioniert und den Bewegungsablauf eines Körpers beeinflusst. Verfügt man hinreichend genau über alle notwendigen Informationen, so lässt sich mit ihnen der Bewegungsablauf eines Körpers im Prinzip bis in alle Zukunft genau voraussagen (**Determinismus**).

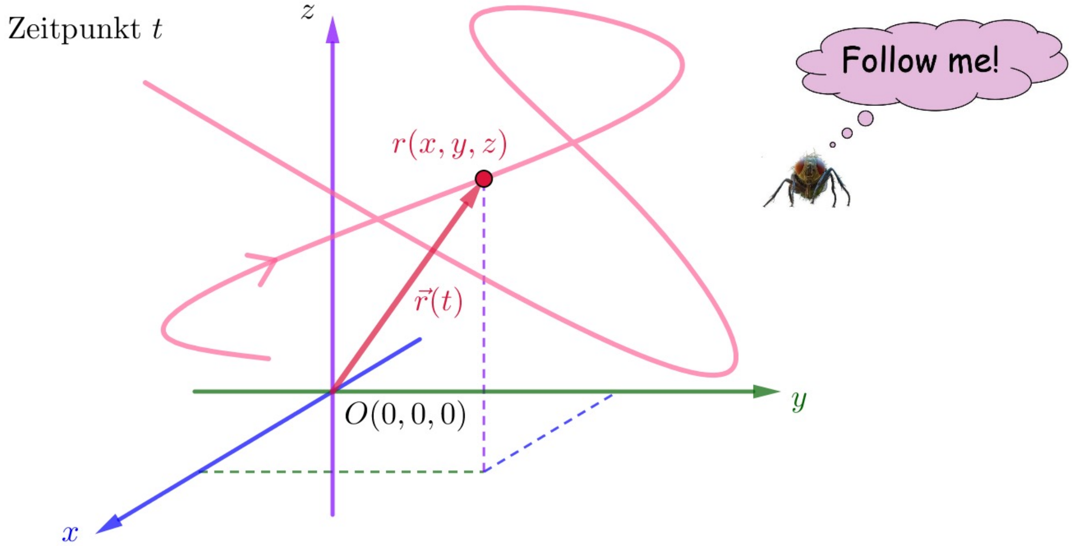
**Die dreidimensionale Ortsfunktion $\vec{r}(t)$:** Den Bewegungsablauf eines Körpers "vorauszusagen" bedeutet, dass wir zu jedem Zeitpunkt $t$ präzise angeben können, an welchem Ort $r$ sich der Körper befindet. Der Ortsvektor $\vec{r}$ wird also als Funktion der Zeit $t$ aufgefasst. Wir nennen dieses mathematische Konstrukt eine **Ortsfunktion** $\vec{r}(t)$:

$$\text{Dreidimensionale Ortsfunktion:}\qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & \vec{r}(t) \end{array}$$

Jeder **Zeitpunkt** $t$ ist, wenn wir die Zeiteinheit mal ausser Acht lassen, einfach eine Zahl auf einer reellen Zahlenachse: $t \in \mathbb{R}$.

Orte sind – unter Weglassung allfälliger Längeneinheiten – Punkte $r(x, y, z)$ in einem dreidimensionalen, reellen Koordinatensystem: $r \in \mathbb{R}^3$. Wir notieren einen Ort $r$ in der Regel als **Ortsvektor** $\vec{r}$, also in Form einer Verschiebung, die mich vom Ursprung $O(0, 0, 0)$ nach $r$ bringt.

Die Ortsfunktion $\vec{r}(t)$ ordnet jedem Zeitpunkt $t$ einen Ort $\vec{r}$ zu, wo sich der Schwerpunkt des Körpers dann befindet. Das folgende Bild mit der Flugbahn einer Fliege in einem dreidimensionalen Raum soll den Gedanken verdeutlichen.



**Reduktion auf eine eindimensionale Ortsfunktion $x(t)$:** Um nun im dreidimensionalen Raum Newton'sche Mechanik vollständig zu betreiben, müssten wir die Vektorgeometrie ($\approx$ Rechnen im dreidimensionalen Raum) mit der Differentialrechnung ($\approx$ mathematische Beschreibung von Veränderungen) verknüpfen. Das ist allerdings ziemlich anspruchsvoll und gehört zum Stoff des ersten Studienjahrs der meisten naturwissenschaftlichen Disziplinen.

Wir schränken deshalb unsere Betrachtungen auf Bewegungen längs von Geraden ein. Bei solchen **geradlinigen Bewegungen** können wir die $x$-Achse in die Bewegungsrichtung legen. So spielen die anderen Achsen keine Rolle mehr und wir schreiben für die Ortsfunktion nur noch:

$$\text{Eindimensionale Ortsfunktion:} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & x(t) \end{array}$$

Zu jedem Zeitpunkt $t$ gehört nun ein Ort $x$ auf der (einzigen) **Ortsachse**, eben: $x(t)$.[1]

Hier das Beispiel einer eindimensionalen Bewegung aus unserem QM-Buch (Griffiths S. 22):

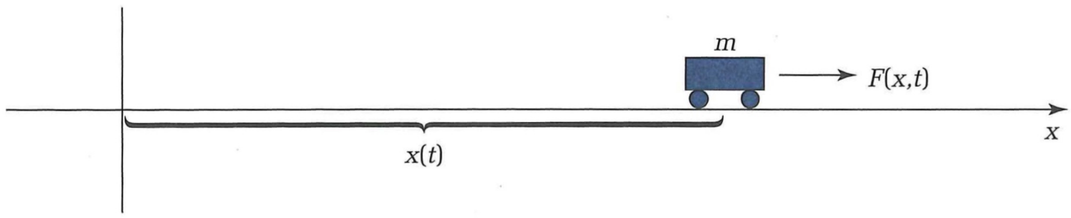



Abbildung 1.1: Ein „Teilchen“, das unter dem Einfluss einer bestimmten Kraft auf eine eindimensionale Bewegung beschränkt ist.

**Bemerkung:** Man könnte meinen, dass diese Einschränkung auf eine einzige Bewegungsdimension relativ krass sein dürfte – und natürlich stimmt das auch, wenn wir an die Vielfalt von Bewegung im dreidimensionalen Raum denken! Gleichzeitig ist diese Reduktion aber halb so schlimm, denn sie verbaut uns in keiner Weise den Blick auf die Frage, die uns momentan in der klassischen Mechanik und später in der Quantenmechanik beschäftigt. Wir wollen nämlich wissen, wie die grundlegenden mechanischen Gesetze den Bewegungsablauf eines Körpers festlegen. Dieser Frage kann man ebenso gut im Eindimensionalen nachgehen und daran die theoretischen Grundprinzipien verstehen. Tatsächlich ist diese Einschränkung auf eine Dimension für uns fast ein Muss, denn im Dreidimensionalen wäre die notwendige Mathematik für unser Niveau einigermassen überfordernd, sodass sie uns den Blick aufs Wesentliche wohl verstellen würde.

## 2 Die Verwendung des Aktionsprinzips in der 1. Klasse:

Wie wird nun in der klassischen Mechanik die Ortsfunktion $x(t)$ ganz konkret festgelegt? Denken wir einfach zurück, wie wir das in der 1. Klasse gemacht haben!

1. Zunächst haben wir jeweils alle auf einen Körper wirkenden Kräfte via Vektoraddition ($=$ Aneinanderhängen ihrer Kraftpfeile) zur **resultierenden Kraft** $F_{\text{res}}$ zusammengefasst.

2. Danach haben wir das **Aktionsprinzip (= 2. Newton'sches Axiom)** benutzt, gemäss dem die **Beschleunigung** $a$, die der Körper erfährt, direkt mit $F_{\text{res}}$ zusammenhängt:

$$F_{\text{res}} = m \cdot a \tag{1}$$

Darin wird die **Masse** $m$ als ein Mass für die **Trägheit** des Körpers verstanden.

Wir haben also die auf den Körper wirkende Beschleunigung mittels $a = \frac{F_{\text{res}}}{m}$ bestimmt.

[1] In der 1. Klasse hatten wir uns in der Mechanik anfangs ebenfalls auf geradlinige Bewegungen beschränkt. Die Kreisbewegungen wurden später separat untersucht. Den Ort hatten wir damals oft mit $s$ anstatt mit $x$ abgekürzt.

**Bemerkung:** Da wir die Bewegung auf eine Dimension reduziert haben, sind nun sowohl $F_{\text{res}}$, als auch $a$ reelle Zahlen (mit Einheiten). Sie können auch negative Werte annehmen! $F_{\text{res}} < 0$ zeigt z.B. in die negative Richtung der $x$-Achse. Wegen $m > 0$ hat die Beschleunigung $a$ stets dasselbe Vorzeichen wie $F_{\text{res}}$ und zeigt somit auch stets in dieselbe Richtung.

3. An dieser Stelle half uns eine weitere starke Einschränkung: Wir haben uns nur mit Situationen auseinandergesetzt, in denen sich die auf den Körper wirkenden Kräfte **nicht verändern**. In der Folge waren auch $F_{\text{res}}$ und $a$ konstant und wir hatten es stets mit einer sogenannt **gleichmässig beschleunigten Bewegung** zu tun.

   Zu derartigen Bewegungen mit $a = \text{konst.}$ hatten wir schon vor der **Dynamik** ($\approx$ Betrachtung von Bewegungsabläufen mittels Kräften), nämlich in der **Kinematik** ($\approx$ mathematische Beschreibung von Bewegungen), verschiedene **Bewegungsgleichungen** kennengelernt. Diejenige für die Strecke $s$ bei **gleichmässig beschleunigter Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit (gmbBmA)** lautete beispielsweise:

$$s = v_0 t + \frac{a}{2} t^2$$

   Hier taucht neu die Anfangsgeschwindigkeit $v_0$ zum Zeitpunkt $t = 0$ auf.

4. Auch wenn wir das damals kaum je gemacht haben, können wir nun rückblickend rasch eine Ortsfunktion $x(t)$ notieren:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2 \tag{2}$$

   $x_0$ steht für den Startort bei $t = 0$. Der Ort $x(t)$ zum Zeitpunkt $t$ ist gegeben durch den Startort $x_0$ plus die bis dahin zurückgelegte Strecke $s = v_0 t + \frac{a}{2} t^2$.

**Fazit:** Halten wir nochmals fest, welche grundlegenden Aussagen zur Mechanik wir in der 1. Klasse gesehen haben:

- Das **Aktionsprinzip** (1) verknüpft die auf einen Körper wirkenden **Kräfte** mit dessen Bewegungsablauf. Die Kräfte legen gemeinsam, nämlich zusammengefasst zur **resultierenden Kraft** $F_{\text{res}}$, die auf den Körper wirkende **Beschleunigung** $a$ fest:

$$F_{\text{res}} = m \cdot a \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{F_{\text{res}}}{m}$$

- Dabei ist die **Masse** $m$ ein Mass für die **Trägheit** des Körpers, also für seinen "Widerstand" gegen die Veränderung seines Bewegungszustandes durch Kräfte. Das kommt in $a = \frac{F_{\text{res}}}{m}$ zum Ausdruck. Je grösser $m$ ist, desto geringer wird die Beschleunigung $a$ ausfallen und desto langsamer wird sich die Geschwindigkeit des Körpers verändern.

Gleichzeitig seien auch nochmals die Einschränkungen angeführt, derer wir uns im Rahmen der Mechanik in der 1. Klasse bedient haben:

- Wir haben ausschliesslich **geradlinige (= eindimensionale) Bewegungen** betrachtet, sodass aus der 3D-Ortsfunktion $\vec{r}(t)$ eine 1D-Ortsfunktion $x(t)$ wurde.

- Wir haben uns auf Situationen resp. Bewegungsabläufe beschränkt, bei denen alle Kräfte und somit auch die resultierende Kraft $F_{\text{res}}$ **konstant** waren. Folglich ergaben sich ausschliesslich **gleichmässig beschleunigte Bewegungen** ($a = \text{konst.}$) und die komplizierteste Ortsfunktion, mit der wir es zu tun haben konnten, war (2).

Wie bereits erwähnt, werden wir uns in den weiteren Betrachtungen weiterhin auf eindimensionale Bewegungen beschränken. Allerdings lassen wir nun auch sich verändernde Kräfte zu. Das macht die Angelegenheit bereits wesentlich komplizierter und führt dazu, dass wir das Aktionsprinzip mathematisch ganz neu auffassen müssen!

## 3 Die Beschleunigung als zweite Ableitung des Ortes: $a = \frac{d^2x}{dt^2}$

Die Beschleunigung $a$ beschreibt die zeitliche Veränderung der **Geschwindigkeit** $v$. Diese wiederum steht für die zeitliche Veränderung des **Ortes** $x$. In der 1. Klasse – als wir von der Differentialrechnung eigentlich noch "keinen Blassen" hatten – haben wir für $v$ und $a$ definiert:

$$v := \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \text{und} \qquad a := \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Die Geschwindigkeit $v$ war die Steigung im $t$-$x$-Diagramm (Ortsdiagramm); die Beschleunigung war die Steigung im $t$-$v$-Diagramm (Geschwindigkeitsdiagramm). Mangels Differentialrechnung konnten wir damals mit den obigen Definitionen allerdings nur für geradlinige Graphenabschnitte die Steigung und somit $v$ resp. $a$ berechnen.

Unter Verwendung der Differentialrechnung formulieren wir nun aber neu:

$$v(t) := x'(t) \equiv \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \tag{3}$$

$$a(t) := v'(t) \equiv \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = x''(t) \tag{4}$$

Die **Ortsfunktion** $x(t)$ gibt den Ort des betrachteten Objektes zum Zeitpunkt $t$ an. Aus ihr gehen durch Differentiation (= Ableiten) die **Geschwindigkeitsfunktion** $v(t)$ und die **Beschleungiungsfunktion** $a(t)$ hervor. Mit unserem Verständnis der Ableitung als Beschreibung einer Veränderung können wir auch schreiben:

- Die **Momentangeschwindigkeit** $v(t)$ gibt an, wie sich die Ortsfunktion $x(t)$ zum Zeitpunkt $t$ infinitesimal am verändern ist:

  $$\mathrm{d}x = v(t) \cdot \mathrm{d}t$$

  "Zum Zeitpunkt $t$ verändert sich der Ort $x$ im infinitesimalen Zeitabschnitt $\mathrm{d}t$ um die infinitesimale Strecke $\mathrm{d}x = v(t) \cdot \mathrm{d}t$."

- Die **momentane Beschleunigung** $a(t)$ gibt an, wie sich die momentane Geschwindigkeit $v(t)$ zum Zeitpunkt $t$ infinitesimal am verändern ist:

  $$\mathrm{d}v = a(t) \cdot \mathrm{d}t$$

  "Zum Zeitpunkt $t$ verändert sich die Geschwindigkeit $v$ im infinitesimalen Zeitabschnitt $\mathrm{d}t$ um den infinitesimalen Betrag $\mathrm{d}v = a(t) \cdot \mathrm{d}t$."

Als Zwischenresultat wollen wir das Aktionsprinzip (1) neu festhalten. Aus $F_{\text{res}} = m \cdot a$ folgt mit (4):

$$F_{\text{res}} = m \cdot \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \tag{5}$$

Die resultierende Kraft $F_{\text{res}}$ legt zu jedem Zeitpunkt die zweite Ableitung der Ortsfunktion $x(t)$ fest.

Solange die auf den Körper wirkenden Kräfte konstant sind, ergeben sich aus dieser Formulierung noch keine neuen Schwierigkeiten oder Erkenntnisse, denn die zweite Ableitung der Ortsfunktion $x(t)$ ist eben die Beschleunigungsfunktion $a(t)$, die nun halt eine konstante Funktion ist.

Bevor wir nun gleich sich verändernde Kräfte zulassen wollen noch dies: Bei gleichmässiger resp. konstanter Beschleunigung sind wir in der 1. Klasse von der Ortsfunktion (2) ausgegangen. Passt diese Ortsfunktion wirklich zu konstanten Kräften? Falls ja, so müsste sich als zweite Ableitung von (2) tatsächlich die konstante Beschleunigung $a$ ergeben. Wir überprüfen:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2}t^2 \quad \Rightarrow \quad v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0 + \frac{a}{2} \cdot 2t = v_0 + at \quad \Rightarrow \quad a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a = \text{konst.} \quad \checkmark$$

Die lineare Geschwindigkeitsentwicklung $v(t) = v_0 + at$ passt bestens zur gleichmässigen Beschleunigung.

## 4 Von welchen Grössen hängen Kräfte ab?

Wie sieht es nun aus, wenn die Kräfte sich verändern? Dann dürfte dies wohl auch für die resultierende Kraft zutreffen! Aber wie verändern sich Kräfte überhaupt? Wovon hängen sie denn ab? Oder anders: Welche Grössen tauchen in den **Kraftgesetzen** auf? Vier Beispiele:

**Gravitation an der Erdoberfläche:** Die Gewichtskraft $F_\mathrm{G}$ ist im Wesentlichen konstant. Hier in Zürich erfährt ein Gegenstand eine Erdanziehung proportional zu seiner Masse $m$. Sie beträgt:

$$F_\mathrm{G} = m \cdot g \qquad \text{mit} \quad g = 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \tag{6}$$

Dies ist ein Beispiel für eine **konstante Kraft**: $F = \mathrm{konst.}$.

**Gravitation im Grossen:** Zwei Punktmassen $m_1$ und $m_2$ ziehen sich gegenseitig an. Dabei hängt die Stärke der Anziehung davon ab, wie gross die beiden Massen sind und wie klein ihr Abstand $r$ ist. Newton hat diese Aussage in seinem **Gravitationsgesetz** zusammengefasst:

$$F_\mathrm{G} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \qquad \text{mit} \quad G = 6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2} \tag{7}$$

Diese Kraft hängt von der gegenseitigen Lage beider Massen ab. Interessiert uns nur die Kraft auf die Masse $m_1$ und "fixieren" wir die andere Masse $m_2$, dann hängt die Kraft, die $m_1$ erfährt, nur noch davon ab, wo sich $m_1$ gerade befindet.

Dann wird die Gravitation zu einem Beispiel einer **vom Ort $x$ abhängigen Kraft**: $F = F(x)$.

**Luftwiderstand:** Je schneller sich ein Körper durch die Luft bewegt, um so grösser wird der **Luftwiderstand**. Der Luftwiderstand wirkt der Bewegung entgegen und bremst diese.

Dies ist ein Beispiel für eine **von der Geschwindigkeit $v$ abhängige Kraft**: $F = F(v)$ resp. $F = F(x')$.

**Hangabtrieb auf dem schaukelnden Brett:** Ein Holzbrett sei auf einer Drehachse gelagert (vgl. Abbildung unten). Das Brett werde sinusartig nach links und nach rechts gekippt, sodass für den Neigungswinkel gilt:

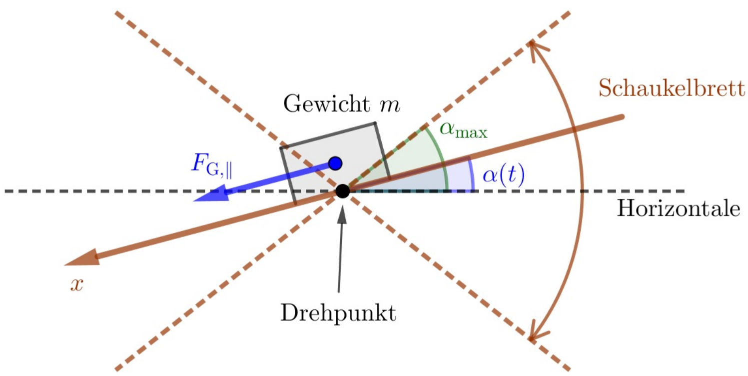
$$\alpha(t) = \alpha_\mathrm{max} \cdot \sin(2\pi f \cdot t)$$

$\alpha_\mathrm{max}$ ist der maximale Neigungswinkel und $f$ steht für die Frequenz der Schaukelbewegung. Auf dem Brett stehe ein Gewicht, wobei die Haftreibung zwischen Gewicht und Brett stets gross genug sei, um eine Bewegung des Gewichts zu verhindern.

Die **Hangabtriebskraft** $F_{\mathrm{G},\parallel}$ (= Parallelkomponente der Gewichtskraft), die das Gewicht dabei erfährt, verändert sich andauernd, denn es gilt:

$$F_{\mathrm{G},\parallel} = F_\mathrm{G} \cdot \sin\alpha(t) = m \cdot g \cdot \sin\big(\alpha_\mathrm{max} \cdot \sin(2\pi f \cdot t)\big)$$

Somit ist $F_{\mathrm{G},\parallel}$ eine **von der Zeit $t$ abhängige Kraft**: $F = F(t)$.



## 5 Das Aktionsprinzip als Differentialgleichung 2. Ordnung

Sämtliche Kräfte hängen vom Zeitpunkt $t$, vom Ort $x$ oder von der Geschwindigkeit $v$ ab oder sind konstant. Folglich können wir auch $F_{\text{res}}$, die sich ja aus einzelnen Kräften zusammensetzt, als Funktion dieser drei Grössen auffassen, also: $F_{\text{res}} = F_{\text{res}}(x, v, t)$. Zeitpunkt, Ort und Geschwindigkeit eines Körpers legen folglich miteinander via Aktionsprinzip dessen aktuelle Beschleunigung fest:

$$F_{\text{res}}(x, v, t) = m \cdot a$$

Notiere ich die Geschwindigkeit $v$ als Ableitung der Ortsfunktion, $v = x'(t)$ und die Beschleunigung $a$ als zweite Ableitung, $a = x''(t)$, so schreibt sich diese Gleichung wie folgt:

$$F_{\text{res}}\big(x(t), x'(t), t\big) = m \cdot x''(t) \tag{8}$$

An dieser Stelle müssen wir innehalten und verstehen, dass wir mit (8) einen fundamental neuen Gleichungstyp vor uns haben. Alle bisherigen Gleichungen waren als Bedingungen für einen einzelnen Zahlenwert $x$ zu verstehen. $x$ musste einen bestimmten Wert ausweisen, um eine Gleichung zu erfüllen.

Neuerdings steht $x$ aber gar nicht mehr für eine einzelne Zahl. Vielmehr ist $x$ eine Funktion, nämlich unsere von der Zeit abhängige Ortsfunktion $x(t)$. Gleichung (8) stellt also eine Bedingung für eine ganze Funktion auf: Innerhalb von $F_{\text{res}}$ können auf der linken Seite $x(t)$, $x'(t)$ und $t$ vorkommen, die rechte Seite enthält auf jeden Fall die Beschleunigung $x''(t)$. Zu jedem beliebigen Zeitpunkt $t$ muss $x(t)$ den durch die Gleichung beschriebenen Zusammenhang zwischen $t$, $x(t)$, $x'(t)$ und $x''(t)$ erfüllen.

Eine solche Gleichung, die nach einer bestimmten Funktion $x(t)$ sucht und in der nicht nur $x(t)$ selber, sondern auch Ableitungen von $x(t)$ auftreten, bezeichnen wir als **Differentialgleichung**. Wie schon angetönt, handelt es sich hier um eine fundamental neue Art von Gleichung, bei dem sich diverse Typen unterscheiden lassen – so wie wir bei bisherigen Gleichungen z.B. zwischen linearen, quadratischen oder Exponentialgleichungen unterschieden haben.

Ohne an dieser Stelle besonders tief in die Theorie der Differentialgleichungen einzutauchen, sei erwähnt, dass das differentiell formulierte Aktionsprinzip (8) stets eine sogenannte **gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung für $x(t)$** ist, weil die höchste darin auftretende Ableitung der Funktion $x(t)$ eben die 2. Ableitung $x''(t)$ ist.

Wie diese Differentialgleichung 2. Ordnung gelöst werden kann, wird in verschiedenen Übungsbeispielen beleuchtet. Es ist aber anzumerken, dass die Bearbeitung von Differentialgleichungen in der Regel eine ziemlich anspruchsvolle Sache ist, wobei oft nicht einmal garantiert ist, dass es eine Lösung gibt, dich sich als geschlossener mathematischer Ausdruck $x(t) = \ldots$ schreiben lässt.[2]

Wir verstehen also neu: Das Aktionsprinzip – die zentrale Aussage der Newton'schen Mechanik – ist formal nichts anderes als eine Differentialgleichung 2. Ordnung für die Ortsfunktion $x(t)$! Auch viele andere fundamentalen Naturgesetze müssen vollständigerweise als Differentialgleichungen formuliert werden. Das wird im Gymnasium noch nicht so klar, weil erstens oft nur vereinfachte Varianten dieser Gesetze für bestimmte Spezialfälle angeschaut werden, und weil zweitens die Mathematik für die differentielle Betrachtung gar nicht hinreichend zur Verfügung steht.

In unserem Ergänzungsfach versuchen wir bis zu einem gewissen Grad in die Mathematik der Differentialgleichungen einzutauchen, denn auch die Schrödinger-Gleichung, das Grundgesetz der Quantenmechanik, ist eine Differentialgleichung für die Wellenfunktion $\Psi(x, t)$. Dabei handelt es sich allerdings nicht um eine gewöhnliche, sondern um eine sogenannt **partielle Differentialgleichung**. Was das bedeutet, werden wir noch in aller Ausführlichkeit sehen.

[2] In all denjenigen Fällen ohne explizit angebbare Lösungsform müssen wir uns mit sogenannt numerischen Lösungen behelfen, die sich der exakten Lösung mittels verschiedener rechnerischer Verfahren im Prinzip beliebig gut annähern lassen.

# 6 Das Potenzial $V$ – ein neuer Name für die potenzielle Energie $E_{\mathrm{pot}}$

Eine Kraft $F$, die nicht von der Geschwindigkeit $v$ ($=1$. Ableitung $x'$ der Ortsfunktion $x(t)$) abhängt, kann häufig mit einer potenziellen Energiefunktion $E_{\mathrm{pot}}(x,t)$ in Verbindung gebracht werden. Eine solche Kraft hat nämlich oft damit zu tun, dass verschiedene Körper sich aufgrund bestimmter Eigenschaften anziehen oder abstossen, weshalb die relative Lage dieser Körper für die im System vorhandene Energie eine Rolle spielt.

**Beispiel Gravitation:** Als Gravitation $F_{\mathrm{G}}$ bezeichnen wir die Anziehung zwischen zwei Körpern aufgrund ihrer Massen. Je weiter diese Körper voneinander entfernt sind, desto grösser ist die potenzielle Energie $E_{\mathrm{pot}}$, die im System gespeichert ist. Das verstehen wir gut, denn Energie ist ja ganz allgemein gespeicherte Arbeit und zur Vergrösserung der Distanz zwischen den Körpern muss (Hub-)Arbeit gegen $F_{\mathrm{G}}$ verrichtet werden. Diese wird im System in Form von potenzieller Energie gespeichert. Die Richtung von $F_{\mathrm{G}}$ zeigt an, in welche Richtung sich die beiden Körper zur Verringerung von $E_{\mathrm{pot}}$ bewegen müssten. Mathematisch bedeutet dies:

$$F_{\mathrm{G}} = -\frac{\partial E_{\mathrm{pot}}}{\partial x}$$

Das braucht natürlich etwas Erläuterung:

- Zunächst steht $\frac{\partial E_{\mathrm{pot}}}{\partial x}$ für die Ableitung der potenziellen Energiefunktion $E_{\mathrm{pot}}(x,t)$ nach dem Ort $x$. Dabei wird mit dem Symbol $\partial$ anstelle von $\mathrm{d}$ angezeigt, dass $E_{\mathrm{pot}}(x,t)$ von mehreren Variablen, nämlich $x$ und $t$ abhängt, es hier aber nur um die Ableitung nach der Variable $x$ geht. Diese teilweise Ableitung nach nur einer von mehreren Variablen wird als **partielle Ableitung** bezeichnet.

- Nimmt $E_{\mathrm{pot}}$ zu, während $x$ anwächst, so ist $\frac{\partial E_{\mathrm{pot}}}{\partial x} > 0$, also positiv. Das kann man auch so interpretieren: Das Vorzeichen von $\frac{\partial E_{\mathrm{pot}}}{\partial x}$ gibt die Richtung der Zunahme von $E_{\mathrm{pot}}$ an, also ob für eine Zunahme von $E_{\mathrm{pot}}$ auf der $x$-Achse vom aktuellen Ort $x$ aus in die positive oder in die negative Richtung zu gehen ist.

- Die Gravitation $F_{\mathrm{G}}$ zeigt aber eben genau in die Gegenrichtung der Zunahme von $E_{\mathrm{pot}}$ – daher das Minuszeichen vor der partiellen Ableitung.

- Je stärker sich die potenzielle Energiefunktion $E_{\mathrm{pot}}$ am Ort $x$ am verändern ist, desto stärker ist dort die Gravitation $F_{\mathrm{G}}$.

Wir merken schon: Immer von der potenziellen Energiefunktion $E_{\mathrm{pot}}(x,t)$ zu sprechen, ist ein bisschen umständlich. Daher hat es sich in der theoretischen Physik eingebürgert, diese potenzielle Energiefunktion einfach als **Potenzial** $V(x,t)$ zu bezeichnen. Alle Kräfte $F$, die sich als (negative) örtliche Ableitung eines Potenzials $V$ schreiben lassen, bezeichnet man als **konservative Kräfte**. Für konservative Kräfte $F$ und ihr zugehöriges Potenzial $V$ gilt also stets:

$$F = -\frac{\partial V}{\partial x} \tag{9}$$

In praktisch allen von uns betrachteten Fällen ist zudem das Potenzial nur vom Ort $x$, aber nicht von der Zeit $t$ abhängig: $V = V(x)$.

## Das Aktionsprinzip im Falle konservativer Kräfte

Sobald wir es mit einem Körper zu tun haben, der ausschliesslich unter dem Einfluss konservativer Kräfte steht, kann seine resultierende Kraft als negative Ableitung eines Potenzials $V(x,t)$ notiert werden, sodass wir das Aktionsprinzip nochmals neu schreiben können:

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = m \cdot \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \tag{10}$$

So finden wir dieses Aktionsprinzip auch im QM-Buch von Griffiths im Abschnitt 1.1 zitiert.

# 7 Altbekannte und neue Beispiele von Potenzialen

Zum Schluss wollen wir uns noch ein paar Beispiele von Potenzialen und den damit verbundenen Kräften anschauen. Manches davon haben wir schonmal gesehen, anderes mag neu sein.

**Lokales Gravitationspotenzial an der Erdoberfläche (= homogenes Gravitationsfeld):** Wie oben gesehen gilt an der Erdoberfläche:

$$V(x) = m \cdot g \cdot x \tag{11}$$

$m$ = Masse, $g$ = Ortsfaktor (hier: $g = 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$), $x$ = Höhe über dem Nullniveau.

Mit diesem Potenzial verbunden ist die Gewichtskraft an der Erdoberfläche:

$$F_\mathrm{G} = -\frac{\partial V}{\partial x} = -m \cdot g \qquad \text{(nach unten!)} \tag{12}$$

**Zentralpotenzial eines Himmelskörpers:** Die Gewichtskraft $F_\mathrm{G}$ nimmt mit zunehmender Distanz $x$ zur Erde ab. Für dieselbe Höhendifferenz braucht es somit immer weniger Hubarbeit, je weiter weg man von der Erde ist. Das Gravitationspotenzial flacht immer mehr ab. Dessen mathematische Beschreibung wird am einfachsten, wenn wir das Nullniveau ins Unendliche legen:

$$V(r) = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r} \tag{13}$$

$G$ = **universelle Gravitationskonstante** $= 6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}}$, $M$ = Masse des Zentralkörpers (im Fall der Erde: $M = 5.972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$), $m$ = Masse des betrachteten Körpers, $r$ = Abstand zum Erdmittelpunkt (Gleichung gilt nur für $r \geq$ Erdradius).

Diese Gravitationspotenzial ist direkt verknüpft mit dem **Newton'schen Gravitationsgesetz**:

$$F_\mathrm{G}(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} \qquad \text{(Richtung Erdmittelpunkt!)}$$

**Zentralpotenzial einer elektrischen Punktladung:** Eine einzelne Punktladung $Q$ erzeugt um sich ein elektrisches Feld, so wie ein Himmelskörper um sich ein gravitatives Feld erzeugt. Die Verschiebung einer anderen Ladung $q$ in diesem Feld ist mit einem Energieumsatz verbunden. Weil das Gravitationsgesetz und das **Coulombgesetz** praktisch identisch aufgebaut sind, ergibt sich dieselbe Art von Potenzial mit einem Nullniveau im Unendlichen:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q}{r} \quad \Rightarrow \quad \text{Coulombkraft:} \quad F_\mathrm{el} = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q}{r} \tag{14}$$

$\varepsilon_0$ = **Dielektrizitätskonstante** $= 8.854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{N \cdot C^2}}$, $Q$ = Zentralladung, $q$ = Ladung des betrachteten Körpers, $r$ = Abstand zwischen $Q$ und $q$.

In (14) gibt es – im Gegensatz zu (13) und (12) – kein Minuszeichen, weil sich zwei Ladungen mit gleichem Vorzeichen abstossen. (Zwei Massen ziehen sich ja stets an.)

Für das Verständnis des Aufbaus der Elektronenhülle um einen Atomkern ist dieses elektrische Zentralpotenzial, das auch als **Coulombpotenzial** bezeichnet wird, von grosser Bedeutung. Beträgt die Kernladung $Q = +Ze$ ($Z$ = Ordnungszahl des Elementes), so lautet das Potenzial für ein Elektron mit Ladung $q = -e$:

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Z \cdot e^2}{r} \tag{15}$$

$e$ = **Elementarladung** $= 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$.