8 Laufende Wellen

Schallwellen bewegen sich durch die Luft, in einem gespannten Seil kann man Wellenberge und -täler laufen lassen, Licht hat offenbar auch etwas mit sich ausbreitenden Wellen zu tun, etc.

In diesem Kapitel soll nun die mathematische Beschreibung einer solchen **laufenden Welle** erfolgen. Mit der **Ausbreitungsgeschwindigkeit** c und der **Wellenlänge** λ lernen wir dabei zwei sehr wichtige neue Grössen kennen.

8.1 Das Ablösen eines einzelnen Wellenberges

Denke dir die folgende Situation (vgl. Abb. 20):

(a) Aus dem obersten Stock eines hohen Hauses lässt du, am Fenster stehend, ein relativ langes Seil aussen am Haus herunterhängen. Der Einfachheit halber wird es in Abb. 20 allerdings horizontal gezeichnet.

(b) Führst du mit der Hand eine kurze seitliche Auslenkung aus, so nimmt das Seil diese auf und leitet sie in sich weiter.

(c) In der Folge siehst du, wie sich ein **Wellenberg** im Seil fortpflanzt. Dies macht er mit einer bestimmten **Ausbreitungsgeschwindigkeit** c.

Bemerkung 1: Alle Arten von Signalen werden im Seil mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit c weitergegeben, so auch Wellen. Deshalb spricht man auch von der **Signal**- oder **Wellengeschwindigkeit**. Sie hängt vor allem von der Beschaffenheit des Seils (Dicke, Material) und von dessen Spannung ab, hingegen praktisch überhaupt nicht von der Anregungsfrequenz f.

Bemerkung 2: Nicht das Seil bewegt sich, sondern nur der Wellenberg. Jede Stelle im Seil gibt ihre seitliche Auslenkung an die nächste Stelle weiter.

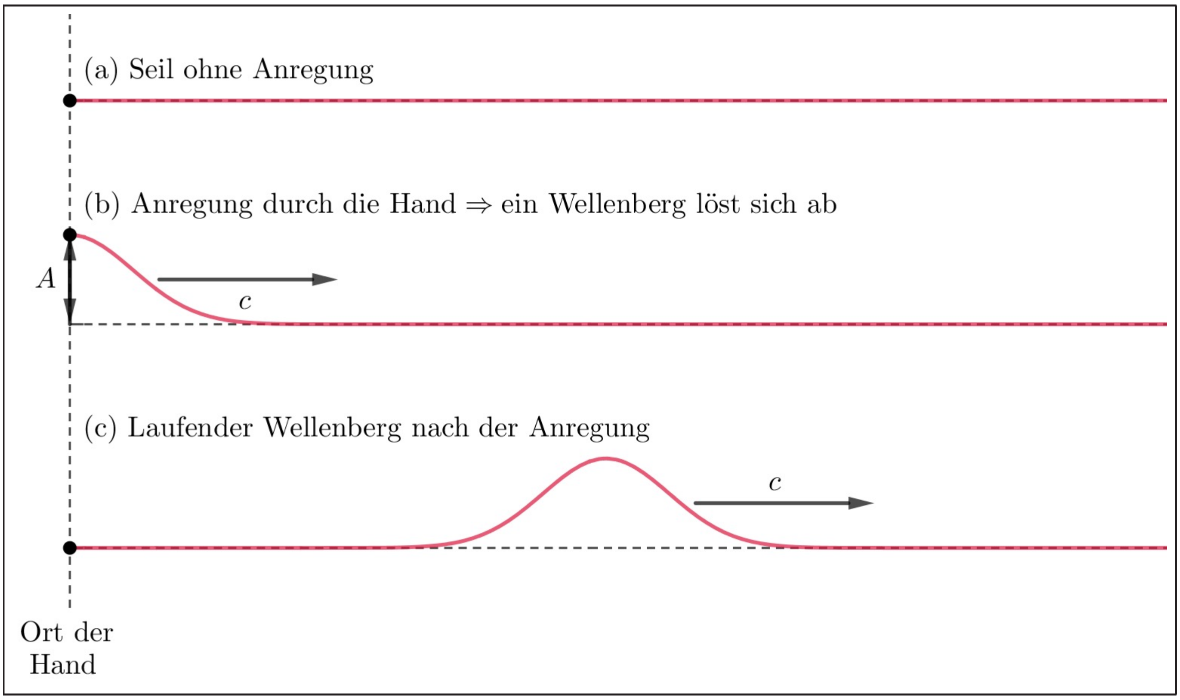

Abbildung 20: Das Loslösen eines Wellenbergs vom Ort der Anregung. Ein von der Hand gegebener Impuls wird im Seil mit der Wellengeschwindigkeit c weitergegeben.

8.2 Die Anregung einer laufenden Welle

Natürlich kannst du mit der Anregung des Seils fortfahren. Schüttelst du das Seil weiter sinusartig hin und her, so lösen sich ständig weitere Wellenberge und Wellentäler von der Hand ab und es entsteht eine sinusförmige **laufende Welle** (vgl. Abb. 21). Dabei bezeichnen wir die Distanz zwischen zwei benachbarten Wellenbergen (oder -tälern) als **Wellenlänge** λ.

Pro Periode T der Anregungsschwingung löst sich genau eine Wellenlänge λ von der Hand. Oder anders: Pro Periode T geht die Welle um die Strecke λ vorwärts. Daraus ergibt sich der wichtige Zusammenhang zwischen Wellenlänge λ, Periode T und Ausbreitungsgeschwindigkeit c:

$$c = \frac{\lambda}{T} \qquad \text{resp.} \qquad \lambda = c \cdot T \qquad \text{(vgl. } s = v \cdot t \text{ bei einer gleichförmigen Bewegung)}$$

Nochmals konkret: Regt die Hand das Seil mit einer langsamen Schwingung an, so ergeben sich grosse Abstände zwischen zwei Wellenbergen. Eine grosse Periode T erzeugt also eine grosse Wellenlänge λ. Umgekehrt erzeugt eine schnelle Schwingung (T klein) eine kleine Wellenlänge λ.

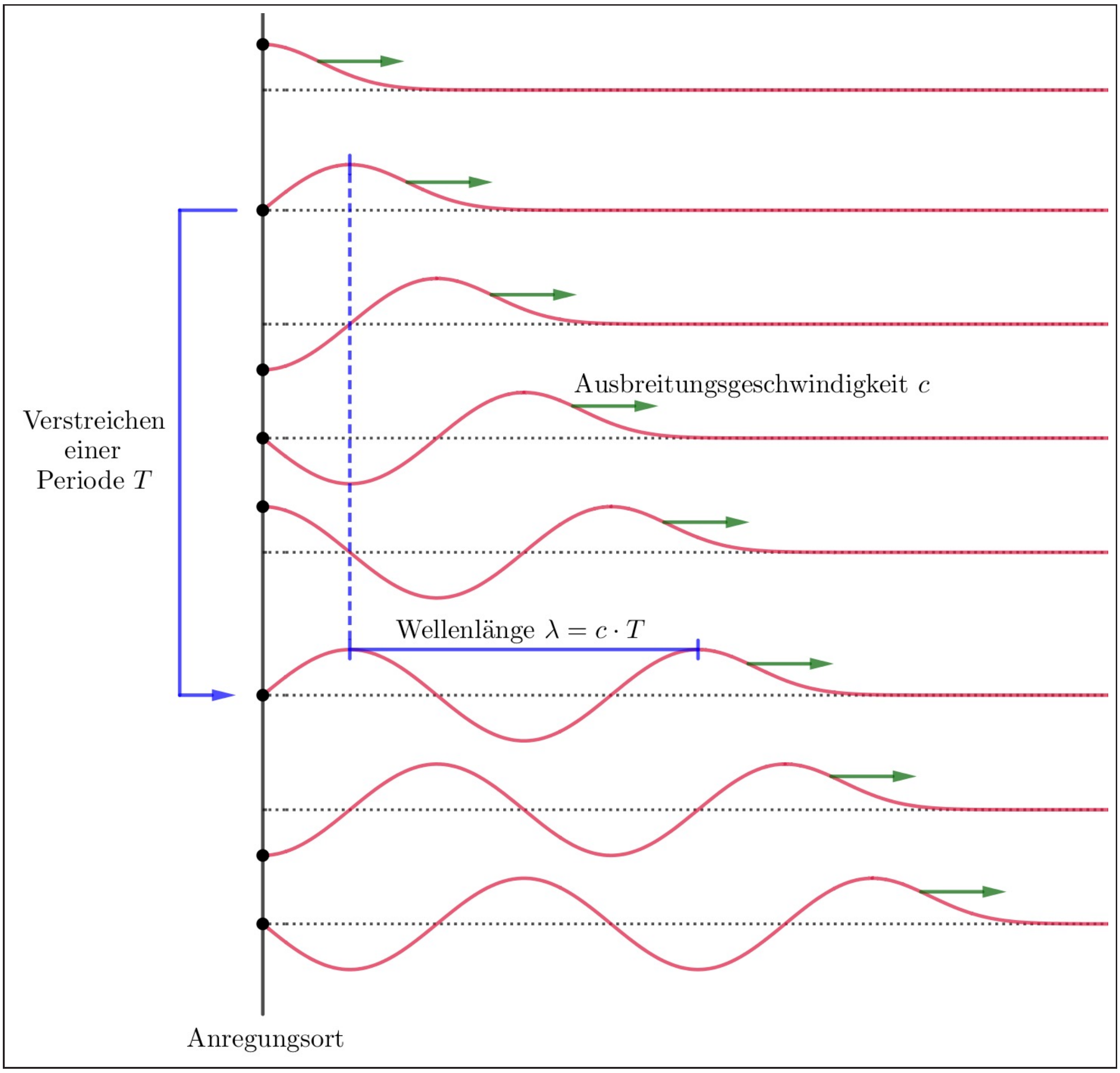

Abbildung 21: Die Anregung einer laufenden Sinuswelle. Pro Periode T der Anregungsschwingung löst sich genau eine Wellenlänge λ ab.

Die Periode T der Anregungsschwingung lässt sich wie immer durch das Inverse ihrer Frequenz f ausdrücken: $T = \frac{1}{f}$. Ersetzen wir damit in der Gleichung oben die Periode T durch die Frequenz f, so erhalten wir folgende Gleichung:

$$c = \frac{\lambda}{T} \qquad \Rightarrow \qquad c = \lambda \cdot f$$

Dieser rechnerische Zusammenhang gilt für beliebige Arten von Wellen in beliebigen Medien: Das Produkt aus Frequenz und Wellenlänge ist stets gleich der Ausbreitungsgeschwindigkeit. Das wollen wir uns merken!

8.3 Die mathematische Beschreibung der laufenden Welle

Wird das Seil in Abb. 20 von einer Sinusschwingung mit Amplitude A und Frequenz f angeregt, so hat die laufende Welle automatisch die Form einer Sinuskurve. Deren Wellenlänge folgt direkt aus der durch das Seil vorgegebenen Ausbreitungsgeschwindigkeit c:

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

Rep.: Bei den Betrachtungen zur modifizierten Sinusfunktion in der Mathematik haben wir gesehen, dass die Information über die horizontale Streckung im Parameter B enthalten ist. So beschreibt

$$f(x) = A \cdot \sin\big(B(x - C)\big) \qquad \text{mit} \quad B = \frac{2\pi}{P}$$

eine Sinusfunktion mit Amplitude A und Periode P, die zudem um die Strecke C nach rechts verschoben ist.

Achtung! In dieser Formulierung hat die Periode nichts mit einer Zeitspanne zu tun. Wir befinden uns in einem rein mathematischen x-y-Koordinatensystem und die Periode P steht einfach für die horizontale Länge einer einzelnen ganzen Sinusschwingung (= Distanz von Wellenberg zu Wellenberg).

Bei der Seilwelle in Abb. 20 handelt es sich nun aber bei der horizontalen Achse tatsächlich um eine **Ortsachse**. Sie wird zwar in der Regel auch mit x bezeichnet, steht jetzt aber wirklich für einen realen Ort – eben eine Stelle x auf dem Seil – und muss im Prinzip mit der Einheit Meter versehen werden. Dem entsprechend wird die mathematische Periode P bei einer solchen laufenden Welle zur Wellenlänge λ. Ausserdem erhält der Parameter B einen neuen Namen. Wir bezeichnen ihn als **Wellenzahl** k. Damit schreiben wir für eine um die Strecke C nach rechts verschobene Welle:

$$h(x) = A \cdot \sin\big(k(x - C)\big) \qquad \text{mit} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Wofür steht die Wellenzahl k? Gegeben ist sie ja durch $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. In Worten: "2π pro Wellenlänge" oder eben "eine Runde auf dem Einheitskreis pro eine bestimmte Strecke". Ihre Einheit muss die Dimension "Zahl durch Länge" aufweisen. Sie muss also $\frac{1}{\mathrm{m}}$ lauten. Würden wir beim Winkel 2π zudem die Hilfseinheit rad notieren, so wäre die k-Einheit $\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$. Dies mag hier für das Verständnis von k effektiv hilfreich sein, wie wir uns an einem Beispiel überlegen wollen.

Beispiel: Beträgt z.B. die Wellenlänge unserer Seilwelle $\lambda = 0.5\,\mathrm{m}$, so beträgt die Wellenzahl $k = \frac{2\pi}{0.5\,\mathrm{m}} = 4\pi\,\frac{1}{\mathrm{m}}$ resp. $k = 4\pi\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$. Das bedeutet: "Pro Meter Seillänge wird im Einheitskreis ein Winkel von $4\pi\,(\mathrm{rad})$ abgefahren." Das entspricht zwei vollen Umdrehungen im Einheitskreis und somit eben zwei vollen Wellenlängen pro Meter.

Die Wellenzahl k steht also für die pro Meter abgefahrene Bogenlänge auf dem Einheitskreis.

Zurück zur Beschreibung der laufenden Welle: Soll die Welle mit der konstanten Geschwindigkeit c nach rechts laufen, so müssen wir dafür die Rechtsverschiebung C gleichförmig mit der Zeit t anwachsen lassen. D.h., wir schreiben für C einfach $C = c \cdot t$,[11] sodass folgt:

$$h(x,t) = A \cdot \sin\big(k\,(x - c \cdot t)\big)$$

Beachte: $h(x,t)$ ist nun eine Funktion, die vom Konzept her von zwei Variablen abhängig ist. Jeder Stelle x auf dem Seil wird zu jedem Zeitpunkt t eine Auslenkung $h(x,t)$ zugeordnet.

Die Funktion $h(x,t)$ kann nach ein paar Umformungen unter Verwendung der Beziehungen $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $c = \lambda f$ und $\omega = 2\pi f$ noch etwas einfacher notiert werden:

$$\begin{aligned}
h(x,t) &= A \cdot \sin\big(k\,(x - c \cdot t)\big) && |\,\text{ausmultiplizieren} \\
&= A \cdot \sin(kx - kct) && |\, k = \frac{2\pi}{\lambda},\ c = \lambda f \\
&= A \cdot \sin\Big(kx - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \lambda f \cdot t\Big) && |\, \lambda \text{ kürzen} \\
&= A \cdot \sin(kx - 2\pi f \cdot t) && |\, \omega = 2\pi f \\
&= A \cdot \sin(kx - \omega t)
\end{aligned}$$

Damit haben wir die Beschreibung der nach rechts laufenden Sinuswelle komplett und kompakt beieinander. Die nach links laufende Welle unterscheidet sich davon nur im Vorzeichen von ωt, denn für die Geschwindigkeit würden wir einfach den negativen Wert $-c$ einsetzen. Halten wir fest:

Sinusfunktionen für laufende Wellen

Auf der x-Achse (= Ortsachse längs der Ausbreitungsrichtung der Welle) **nach rechts** *resp.* **nach links laufenden Sinuswellen** *werden beschrieben durch die Funktionen:*

$$h_{\rightarrow}(x,t) = A \cdot \sin(kx - \omega t) \qquad \textit{resp.} \qquad h_{\leftarrow}(x,t) = A \cdot \sin(kx + \omega t)$$

Diese Funktionen hängen von den beiden Variablen x und t ab: Sie weisen jeder Stelle x auf der x-Achse zu jedem Zeitpunkt t eine Auslenkung $h_{\rightarrow}(x,t)$ resp. $h_{\leftarrow}(x,t)$ zu.

Die in den Funktionsgleichungen enthaltenen Parameter sind:

A = **Amplitude** = *maximale Auslenkung der Welle*

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ = **Wellenzahl** = *Winkel (im Bogenmass) pro Meter*

λ = **Wellenlänge** = *Distanz vom einen zum nächsten Wellenberg*

$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{t}$ = **Kreisfrequenz** = *Winkel (im Bogenmass) pro Sekunde*

$f = \frac{1}{T}$ = **Frequenz** *der Anregung*

$T = \frac{1}{f}$ = **Periode** *der Anregung*

Weiter gelten, wie für jede Art von Welle, die folgenden Beziehungen für die **Ausbreitungsgeschwindigkeit** *c innerhalb des Mediums:*

$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = \frac{\omega}{k}$$

[11] Dies ist die Bewegungsgleichung für die nach der Zeit t zurückgelegte Strecke bei einer gleichförmigen Bewegung, $s = v \cdot t$, nur dass die Geschwindigkeit jetzt mit c und der Ort mit C notiert wurde.