Ergänzungen zur Quantenphysik

Infinitesimale Veränderungen

1 Die Ableitung als Steigung der Tangente an einen Funktionsgraphen

Rep.: Bei gegebener **Funktion** $f(x)$ können wir mittels **Ableitungsregeln** die **Ableitungsfunktion** $f'(x)$ bestimmen. Für den **Funktionsgraphen** haben der Funktionswert $f(x)$ und der Wert der Ableitung $f'(x)$ an der **Stelle** x anschauliche Bedeutungen (vgl. Abb. 1):

Funktionswert $f(x)$: Geben wir uns eine bestimmte Stelle x auf der x-Achse vor, so beschreibt $f(x)$, auf welcher **y-Höhe** der Graph über dieser Stelle x vorbeikommt: $y = f(x)$.

$\Rightarrow$ **"Jeder Punkt P auf dem Funktionsgraphen G_f hat Koordinaten der Form $P\big(x, f(x)\big)$."**

Ableitungswert $f'(x)$: Salopp wird die Ableitung häufig als Steigung des Funktionsgraphen bezeichnet. Genauer ist die Formulierung: Die Ableitung $f'(x)$ steht für die **Steigung** m_t der **Tangente** t an den Funktionsgraphen im Punkt $P\big(x, f(x)\big)$, also: $m_t = f'(x)$.

$\Rightarrow$ **"Ableiten resp. Differenzieren heisst Steigungen berechnen."**

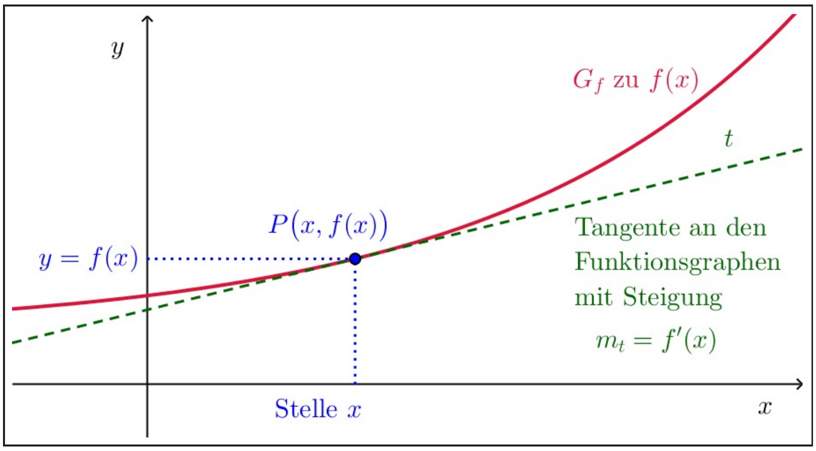

Abbildung 1: Die graphische Bedeutung von Funktionswert $f(x)$ und Ableitung $f'(x)$.

Bei Optimierungsfragen, also bei der Suche nach den Maximal- oder Minimalstellen einer Funktion, ist das Verständnis der Ableitung als Steigung des Graphen sehr nützlich. In einem lokalen Hochpunkt sieht der Graph wie eine Kuppe aus, in einem Tiefpunkt wie eine Senke. In beiden Punkten ist die Steigung gleich 0. Wir sagen: *"$f'(x) = 0$ ist eine notwendige Bedingung dafür, dass die Stelle x eine lokale Extremalstelle der Funktion f ist."*

2 Die Ableitungsdefinition alt und neu betrachtet

Neben dem hilfreichen Bild der Ableitung als Steigung des Funktionsgraphen ist für unsere weiteren Betrachtungen vor allem das folgende Verständnis zentral:

"Die Ableitung $f'(x)$ beschreibt, wie sehr sich der Funktionswert $f(x)$ an der Stelle x am verändern ist."

Je grösser der Ableitungsbetrag $|f'(x)|$ ist, desto steiler ist der Graph über dieser Stelle x und desto stärker ist sich dort der Funktionswert $f(x)$ **am verändern**. An einer steilen Stelle bewirkt bereits eine geringe Veränderung Δx der Variable x eine grosse Veränderung Δf des Funktionswertes $f(x)$.

Dieses Verständnis wollen wir weiter vertiefen, indem wir die Definition der Ableitung nochmals unter die Lupe nehmen. Dabei lernen wir die **Leibnizschreibweise** für die Ableitung kennen: $f'(x) \equiv \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

Definition der Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$

Die **Ableitung** $f'(x)$ *resp.* $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ *einer Funktion* $f(x)$ *ist gegeben durch den Grenzwert des Differenzenquotienten* $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ *für* $\Delta x \to 0$*:*

$$f'(x) \equiv \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{1}$$

Dabei stehen $\mathrm{d}x$ *und* $\mathrm{d}f$ *für* **infinitesimale Veränderungen***, also unendlich kleine Schritte der Variable* x *und der Funktion* $f(x)$ *(an der Stelle* x*).*

N.B.: Das dreifache Gleichheitszeichen "$\equiv$" steht für eine Identität, also dafür, dass wir die beiden Objekte links und rechts des Zeichens als vollkommen identisch miteinander verstehen.

Erläuterungen zur Ableitungsdefinition

- Am Anfang der Ableitungsbildung steht der **Differenzenquotient** $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, also die Steigung m_s einer **Sekante** s durch zwei Punkte auf dem Funktionsgraphen.[1] Der erste Punkt $P\big(x, f(x)\big)$ sitzt über der Stelle x, während der zweite Punkt $Q\big(x+\Delta x, f(x+\Delta x)\big)$ von P aus um Δx nach rechts verschoben ist und demnach über der Stelle $x + \Delta x$ sitzt. Somit beträgt die Sekantensteigung m_s resp. der Differenzenquotient $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ (vgl. Abb. 2):

$$m_s = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \equiv \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

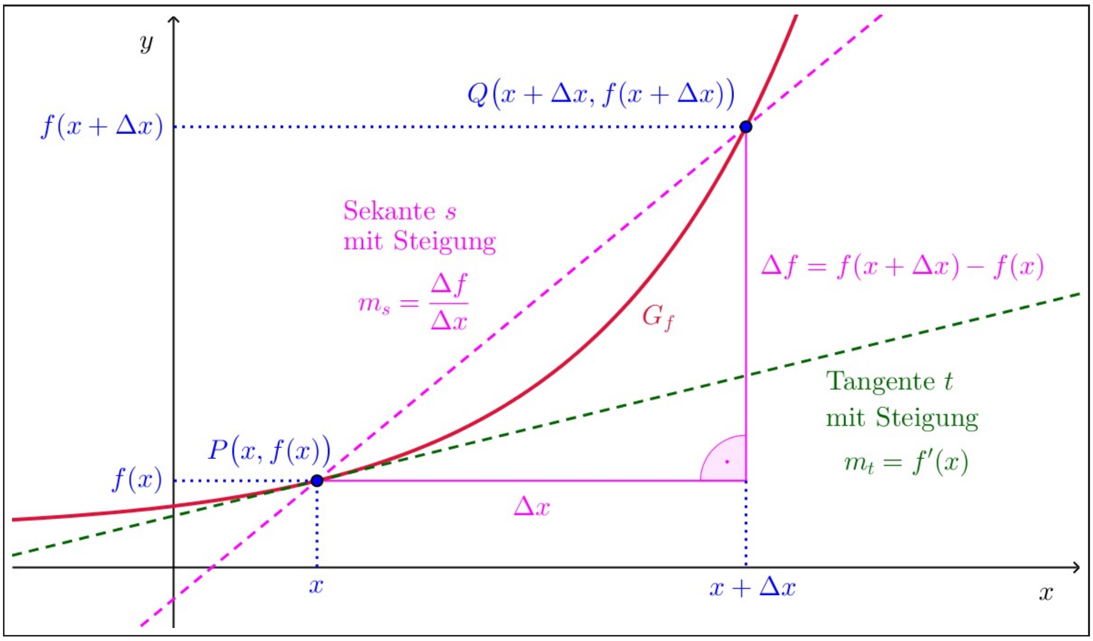

Abbildung 2: Das Steigungsdreieck an die Sekante.

- Lässt man Δx immer kleiner werden, so rutscht Q auf dem Graphen immer näher an P heran. Dadurch wird die Sekante s immer mehr zur Tangente t an den Graphen im Punkt P. Die Sekantensteigung m_s strebt gegen die Tangentensteigung m_t.

[1] lat. *secare* = schneiden ⇒ *Sekante* = schneidende Gerade.

- Wie klein wollen wir Δx werden lassen?

  Die Antwort lautet: **Unendlich klein, aber nicht gleich 0!** Für $\Delta x = 0$ wäre nämlich die Sekantensteigung m_s resp. der Differenzenquotient $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ gar nicht mehr definiert, weil im Nenner eine 0 auftreten würde. Für jedes noch so kleine $\Delta x > 0$ existiert aber $\frac{\Delta f}{\Delta x}$.

  Solange $\Delta x > 0$ ist, wird die Sekantensteigung m_s bei gebogenem Funktionsgraphen nie exakt der Tangentensteigung m_t entsprechen, aber für immer kleiner werdendes Δx wird sie m_t beliebig nahe kommen![2] Deshalb sagen wir: Die Tangentensteigung m_t ist der **Grenzwert** oder **Limes** ($\lim$), dem sich die Sekantensteigung m_s für $\Delta x \to 0$ annähert:[3]

  $$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} m_s \qquad \text{(sprich: “\textit{Limes für Delta x gegen 0 von ms}”)}$$

- Formulieren wir dies mit der Ableitung $f'(x)$ anstelle der Tangentensteigung m_t und dem Differenzenquotienten $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ anstelle der Sekantensteigung m_s, so steht die übliche Definition der Ableitung $f'(x)$ da:

  $$f'(x) \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

- Im Limes $\Delta x \to 0$ werden sowohl die Funktionswertdifferenz Δf, wie auch der Variablenschritt Δx unendlich klein. Ihr Verhältnis besitzt allerdings nach wie vor einen endlichen und genau bezifferbaren Wert, der sich immer mehr der Ableitung annähert.

  Den unbezifferbar klein gewordenen Δf und Δx sagen wir **infinitesimale Veränderungen** oder **infinitesimale Schritte** und schreiben dafür $\mathrm{d}f$ und $\mathrm{d}x$. Damit notieren wir:

  $$f'(x) \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \equiv \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \tag{2}$$

- Und somit sind wir bei einem neuen und sehr interessanten Verständnis der Ableitung angelangt. Durch Umstellung (Multiplikation mit $\mathrm{d}x$) können wir schreiben:

  $$\mathrm{d}f = f'(x) \cdot \mathrm{d}x \tag{3}$$

  An der Stelle x verändert sich der Funktionswert $f(x)$ um den infinitesimalen Schritt $\mathrm{d}f$, wenn sich die Variable x um den infinitesimalen Schritt $\mathrm{d}x$ verändert. Dabei sind $\mathrm{d}f$ und $\mathrm{d}x$ proportional zueinander. Die Proportionalitätskonstante an der Stelle x ist gerade die Ableitung $f'(x)$. Die Ableitung $f'(x)$ beschreibt, wie sich die Funktion $f(x)$ an der Stelle x gerade am verändern ist. Sie steht für das Verhältnis der infinitesimalen Veränderungen $\mathrm{d}f$ und $\mathrm{d}x$ im Punkt $\big(x, f(x)\big)$.

  Vielleicht denkt man nun, dass sich mit diesem “infinitesimalen Zeugs” unmittelbar “nix Gscheites” anfängen lässt, weil die infinitesimalen Veränderungen $\mathrm{d}f$ und $\mathrm{d}x$ ja gar keine angebbaren Zahlenwerte besitzen, aber das ist ganz und gar nicht so. Wir werden sehen, wie nützlich und mächtig dieses Verständnis der inifinitesimalen Schritte ist. Das Geheimnis liegt darin, dass wir mittels Integralrechnung in der Lage sind über unendlich viele infinitesimale Schritte zu summieren und so wieder endliche Werte zu erhalten.

- Halten wir hier zum Ende dieses Abschnittes fest:
  - Infinitesimale Schritte ergeben sich automatisch, wenn wir Ableitungen in der Leibniznotation festhalten: $f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.
  - Damit sind die infinitesimalen Veränderungen proportional zueinander: $\mathrm{d}f = f'(x) \cdot \mathrm{d}x$.
  - Mit diesen infinitesimalen Schritten darf in der Folge gerechnet werden, wie wir es uns ganz allgemein algebraisch gewohnt sind.
  - Um wieder endliche Grössen zu erhalten, muss über die infinitesimalen Schritte integriert werden.

[2] Mathematisch exakter formuliert: Für jede noch so kleine Zahl $\varepsilon > 0$ kann man Δx problemlos soweit verkleinern, dass der Unterschied zwischen m_s und m_t kleiner ist als diese beliebig kleine Zahl ε: $|m_s - m_t| < \varepsilon$.

[3] lat. *limes* = Grenze.

3 Das infinitesimale Verständnis: Im unendlich Kleinen ist alles linear!

Beispiel: Ich möchte wissen, wie sich die Funktion $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 4x - 3$ an der Stelle $x = 2$ am verändern ist.Nun ist $f'(x) = -\frac{4}{3}x + 4$ und somit $f'(2) = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}$, also:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{4}{3} \qquad \text{resp.} \qquad \mathrm{d}f = \frac{4}{3}\,\mathrm{d}x$$

An der Stelle $x = 2$ ist somit die infinitesimale Veränderung $\mathrm{d}f$ des Funktionswertes $f(x)$ gerade $\frac{4}{3}$-mal so gross wie die zugehörige infinitesimale Veränderung $\mathrm{d}x$ der Variable x.

Überlegen wir ganz genau, was das für eine Aussage ist: Wenn wir unendlich nahe an einen Punkt P auf dem Graphen einer Funktion heranzoomen, so erscheint uns der Graph dort geradlinig. Wir können ihn gar nicht mehr von einer Gerade unterscheiden (vgl. Abb. 3)![4]

Das lässt uns umgekehrt sagen: Jeder Funktionsgraph setzt sich aus unendlich vielen, unendlich kleinen, aber eben geradlinigen Abschnittchen zusammen. Auf infinitesimaler Grössenordnung sind alle "anständigen" mathematischen Funktion **linear**![5]

Diese Linearität, also dass die infinitesimalen Veränderungen $\mathrm{d}f$ und $\mathrm{d}x$ **proportional** zueinander sind,[6] bildet den Grundstein der modernen **Analysis** (Differentialrechnung, Integralrechnung, ...). Ausgehend von dieser neuen Mathematik des unendlich Kleinen, die im 17. Jahrhundert von **Sir Isaac Newton** (1642 – 1726) und von **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646 – 1716) unabhängig voneinander entdeckt und entwickelt wurde, haben Mathematik und Naturwissenschaft in den letzten gut 350 Jahren unglaubliche Fortschritte erzielt, die vorher undenkbar gewesen wären.

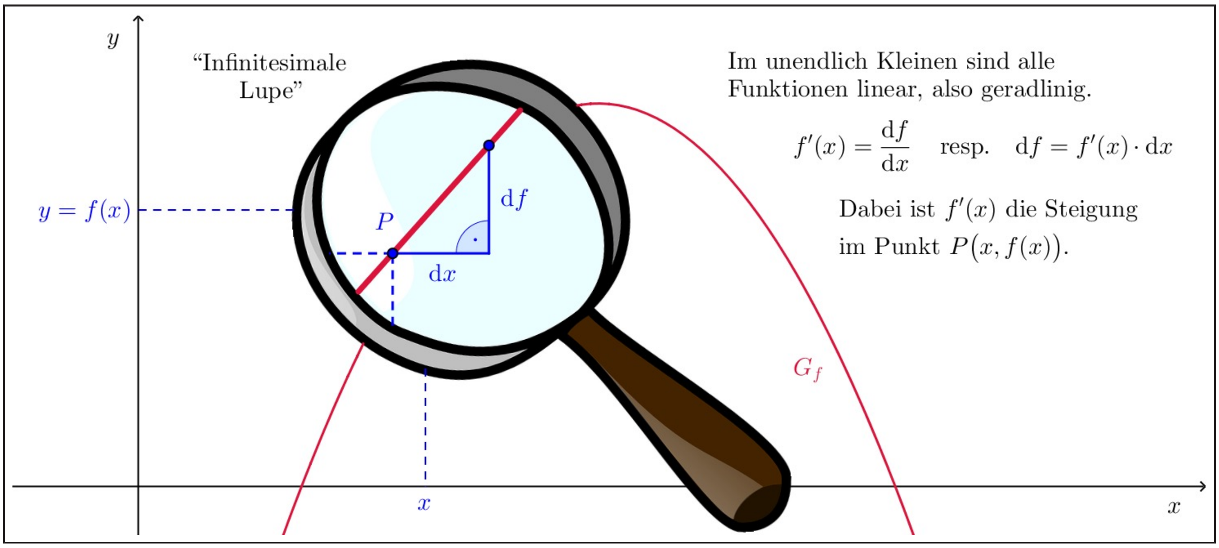

Abbildung 3: Auf infinitesimaler Grössenordnung sind alle Funktionen linear, d.h., der Graph setzt sich aus unendlich vielen unendlich kleinen geradlinigen Teilstücken zusammen.

[4]Das ist vergleichbar mit unserer Situation an der Erdoberfläche. Wir wissen zwar alle, dass wir an der Oberfläche einer riesigen Kugel herumspazieren, aber diese Oberfläche erscheint uns lokal absolut flach und wir machen mit dieser Annahme in unserem Alltag auch keine Fehler. Je kleiner wir den betrachteten Erdoberflächenausschnitt sein lassen, umso geringfügiger resp. umso irrelevanter wird eine die Abweichung zwischen gekrümmter und absolut flacher Oberfläche. Im Grenzwert eines unendlich kleinen Flächenstücks wird der Fehler unendlich klein und somit gibt es keinen messbaren Unterschied mehr.

[5]Es gibt durchaus eine Menge "unanständiger" Funktionen, bei denen dieses Hineinzoomen nicht zur Linearisierung führt. Bei solchen Funktionen ist es in der Regel nur schon problematisch überhaupt eine Ableitung zu definieren, weil der Grenzwert für $\Delta x \to 0$ gar nicht vernünftig ermittelt werden kann.

Glücklicherweise sind physikalische Funktionen in der Regel anständig. D.h., sie lassen sich problemlos (beliebig oft) ableiten und sind im Infinitesimalen eben linear. Davon dürfen wir in unserem Kurs (fast) immer ausgehen.

[6]Vgl. Beispiel oben: $\mathrm{d}f = \frac{2}{3} \cdot \mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}f$ und $\mathrm{d}x$ sind (an der Stelle $x = 8$) proportional zueinander.