Ergänzungen zur Quantenphysik

Vertiefung zur Integralrechnung

1 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Was wir in diesem Abschnitt anschauen, dürfte im Mathematikunterricht mehrheitlich bereits vorgekommen sein. Es kann aber nicht schaden, die Grundlagen der Integralrechnung nochmals genau zu beleuchten.

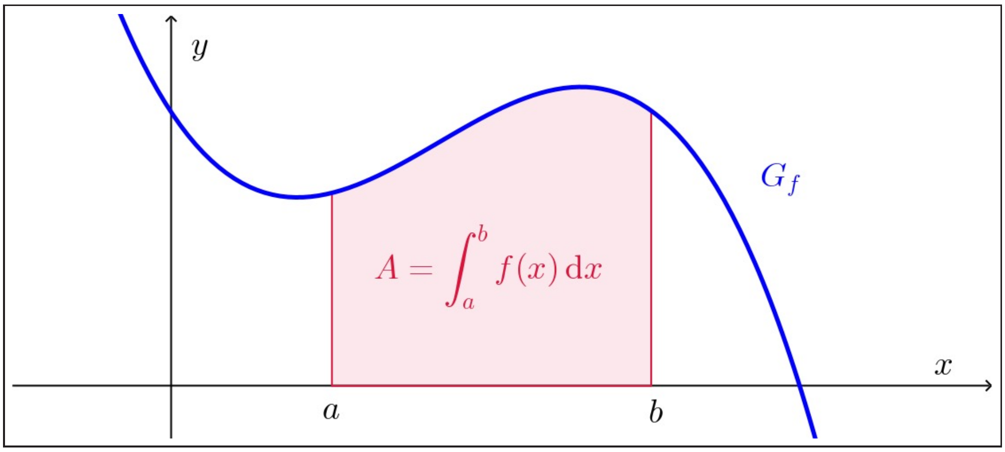

Abbildung 1: Das Integral als Fläche unter einem Funktionsgraphen G_f.

1.1 Das bestimmte Integral als Fläche unter einem Funktionsgraphen

Wir möchten die **Fläche** zwischen dem Graphen einer Funktion $f(x)$ und der x-Achse berechnen. Dabei legen die beiden Stellen $x = a$ und $x = b$ deren seitliche Grenzen fest (vgl. Abb. 1).

Wir gehen davon aus, dass $f(x)$ zwischen a und b eine **stetige** Funktion ist. Es gibt also keine Lücken oder Sprungstellen. Zweitens gelte (momentan) der Einfachheit halber für alle $x \in [a;b]$, dass $f(x) \geq 0$ ist. Somit liegt die zu berechnende Fläche komplett oberhalb der x-Achse. Unter diesen Voraussetzungen bezeichnen wir die gesuchte Fläche A als das **bestimmte Integral** der Funktion $f(x)$ mit **Integrationsgrenzen $\boldsymbol{a}$** und $\boldsymbol{b}$ und schreiben dafür:

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

1.2 Der Hauptsatz

Zur Berechnung eines bestimmten Integrals benutzen wir den sogenannten

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Das **bestimmte Integral** *der Funktion $f(x)$ mit Integrationsgrenzen a und b ist gegeben durch:*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \qquad \text{mit} \quad f(x) = F'(x) \tag{1}$$

Dabei ist $\boldsymbol{F(x)}$ eine **Stammfunktion** *von $f(x)$. Das bedeutet, dass $f(x)$ die Ableitung von $F(x)$ ist.*

Der Beweis des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

Wer den Hauptsatz zum ersten Mal liest und seine Aussage richtig begreift, wird vermutlich recht überrascht sein: Das "Aufleiten", also das Aufspüren einer Stammfunktion, erlaubt die Berechnung der Fläche unter dem Funktionsgraphen! Woher kommt das? Was hat die Flächenberechnung mit der Differentiation zu tun? Weshalb verlangt sie gerade nach dem umgekehrten Vorgang?

Um das besser zu verstehen und damit eben den Hauptsatz zu beweisen, packen wir die Sache von der anderen Seite an. Wir nehmen an, dass wir bereits eine sogenannte **Flächenfunktion** $F(x)$ kennen. Für jedes x entspreche ihr Funktionswert $F(x)$ der Fläche, welche oben und unten durch den Graphen einer Funktion $f(x)$ und die x-Achse, sowie links durch die y-Achse ($x = 0$) und rechts durch die Vertikale an der Stelle x beschränkt wird (vgl. Abb. 2).

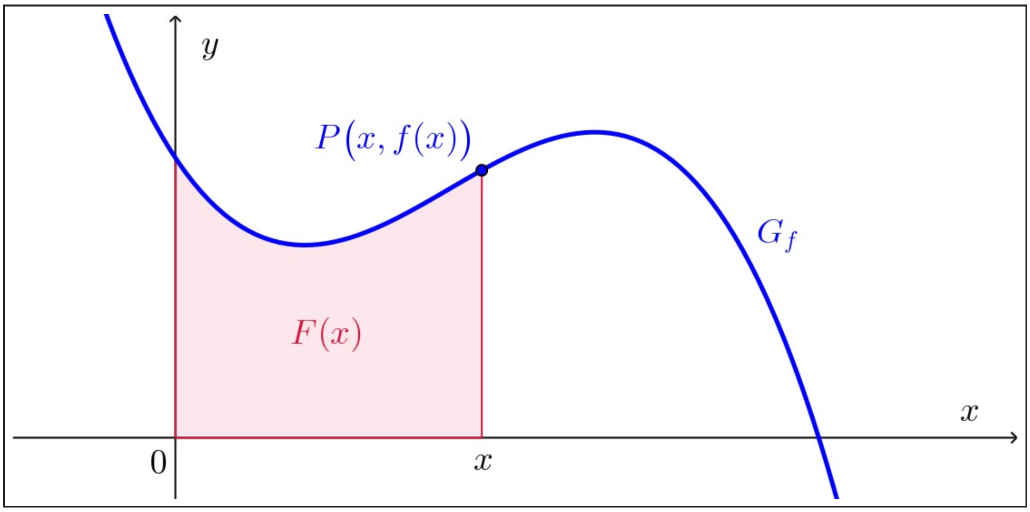

Abbildung 2: Die Flächenfunktion $F(x)$.

Klar ist, dass die Berechnung des bestimmten Integrals zwischen den Stellen $x = a$ und $x = b$ kein Problem mehr darstellt, wenn wir diese Flächenfunktion $F(x)$ erst einmal kennen, denn:

$$\text{Fläche von Stelle } a \text{ bis } b = (\text{Fläche von } 0 \text{ bis } b) - (\text{Fläche von } 0 \text{ bis } a) = F(b) - F(a)$$

Zum Beweis des Hauptsatzes müssen wir nun zeigen, dass die Funktion $F(x)$ tatsächlich eine Stammfunktion der Funktion $f(x)$ ist, dass also die Ableitung $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}$ die Funktion $f(x)$ ergibt. Allerdings kennen wir für $F(x)$ keine explizite Funktionsgleichung. Wir wollen ja einen allgemeinen Zusammenhang beweisen. Also müssen wir die Ableitungsdefinition

$$F'(x) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \tag{2}$$

Schritt für Schritt befolgen. D.h., wir betrachten die Veränderung ΔF der Flächenfunktion bei einem endlichen Variablenschritt Δx, bilden aus diesen beiden Veränderungen den Differenzenquotienten $\frac{\Delta F}{\Delta x}$ und lassen anschließend den Schritt Δx infinitesimal klein werden. Der Limes von $\frac{\Delta F}{\Delta x}$ für $\Delta x \to 0$ ist schließlich die gesuchte Ableitung $F'(x) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}$.

Schritt 1: Die endlich kleine Flächenvergrößerung $\boldsymbol{\Delta F}$: Wir untersuchen, wie sich der Wert der Flächenfunktion $F(x)$ verändert, wenn wir ihren rechten Rand von der Stelle x aus um den endlichen Schritt Δx nach rechts schieben. Dabei wird die Flächenfunktion um das ebenfalls endliche Flächenstück ΔF vergrößert.

Abb. 3 zeigt die Situation. Der endliche Schritt Δx soll bereits so klein sein, dass uns der Funktionsgraph von $f(x)$ als perfekte Gerade erscheint. Allerdings sind wir noch nicht im unendlich Kleinen! Die infinitesimale Situation selber kann ich nicht in einer Abbildung darstellen, denn eine sichtbare Strecke lässt sich offensichtlich immer noch weiter verkleinern...

Die Flächenveränderung ΔF ist die in Abb. 3 eingefärbte Trapezfläche, die sich aus dem grünen Rechteck mit Fläche ΔF_1 unten und dem roten Dreieck mit Fläche ΔF_2 oben zusammensetzt. Vergrößern wir den Variablenwert von x nach $x + \Delta x$, so finden wir für die Veränderung ΔF der Flächenfunktion $F(x)$ ohne Probleme:

$$\Delta F = \Delta F_1 + \Delta F_2 = \frac{\Delta f \cdot \Delta x}{2} + f(x) \cdot \Delta x \tag{3}$$

Schritt 2: Bildung des Differenzenquotienten $\frac{\Delta F}{\Delta x}$: Division durch Δx liefert:

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{2} + f(x)$$

Schritt 3: Übergang ins Infinitesimale: Die Ableitung von $F(x)$ erhalten wir nun, indem wir den Grenzwert des Differenzenquotienten für $\Delta x \to 0$ bilden:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{2} + f(x) \right) = f(x)$$

Der letzte Schritt braucht wohl noch eine kurze Erläuterung: $f(x)$ bleibt bei der Limesbildung $\Delta x \to 0$ unverändert. Es ist einfach der Funktionswert der Funktion f an der Stelle x. Anders sieht dies beim Term $\frac{\Delta f}{2}$ aus. Bei der Ausführung von $\Delta x \to 0$ rückt der Punkt Q in Abb. 3 unendlich nahe an den Punkt P heran. Dabei wird ganz offensichtlich auch die Funktionswertdifferenz Δf unendlich klein und der Term $\frac{\Delta f}{2}$ verschwindet bei der Limesbildung.[1]

Damit haben wir nun aber gezeigt, dass $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f(x)$ ist, und somit ist der Hauptsatz bewiesen.

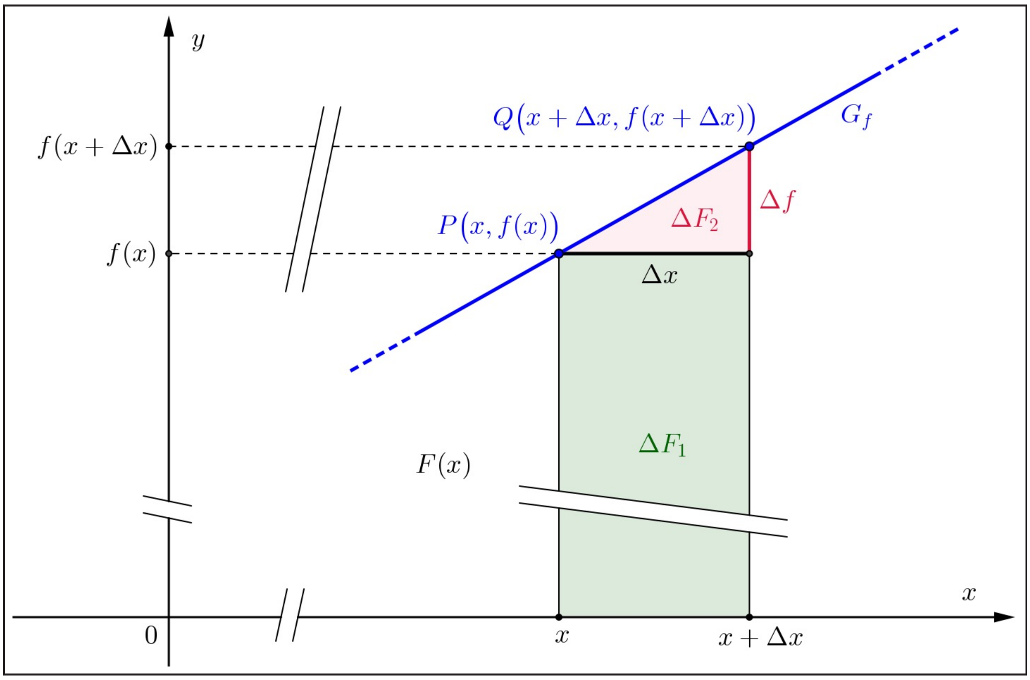

Abbildung 3: Veränderung von $F(x)$ beim endlich kleinen Variablenschritt Δx.

[1]Da wir im Infinitesimalen ja davon ausgehen dürfen, dass die Funktion f in P linear verläuft (Gerade mit Steigung $f'(x)$), könnten wir an dieser Stelle auch Δf durch $f'(x) \cdot \Delta x$ ersetzen. Damit wäre dann ganz direkt ersichtlich, weshalb $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{2} = 0$ ist.

1.3 Physikalische Saloppheit

In der Physik sind wir selbstverständlich froh um ein solides mathematisches Fundament. Manchmal sind wir aber gerne ein bisschen speditiver unterwegs, wohl wissend, dass puristischen Mathematiker∗innen dabei zwischenzeitlich die Haare zu Berge stehen. So hätten wir im Beweis des Hauptsatzes aufgrund von Abb. 3 die Gleichung (3) direkt in differenzieller Form notieren können:

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}F_1 + \mathrm{d}F_2 = \frac{\mathrm{d}f\,\mathrm{d}x}{2} + f(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x$$

Im letzten Schritt nutzen wir die Tatsache, dass das Produkt zweier infinitesimaler Größen – in unserem Fall $\mathrm{d}f \cdot \mathrm{d}x$ – stets "unendlich mal kleiner ist als das Produkt aus einer endlichen und einer infinitesimalen Größe" – hier: $f(x) \cdot \mathrm{d}x$. Aus diesem Grund dürfen wir den Term $\frac{\mathrm{d}f \cdot \mathrm{d}x}{2}$ ohne Fehler weglassen und erhalten so viel schneller:

$$\mathrm{d}F = f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{resp.} \qquad \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f(x)$$

Diesen "saloppen" Umgang mit infinitesimalen Größen erlauben wir uns in der Physik, weil wir wissen resp. uns schon einmal davon überzeugt haben, dass es funktioniert. Die mathematisch fundiertere Vorgehensweise wäre allerdings stets die Betrachtung endlicher Größen mit anschließendem Übergang ins Infinitesimale (Grenzwertbildung $\Delta x \to 0$).

1.4 Rechtecksflächen und Integralnotation

Aus der Umstellung $\mathrm{d}F = f(x)\,\mathrm{d}x$ wird nun klar, dass wir zur Berechnung der Fläche unter einem Funktionsgraphen "einfach" im Infinitesimalen über die Flächen von unendlich dünnen Rechtecken mit Höhe $f(x)$ und Breite $\mathrm{d}x$ zu summieren brauchen. Dieses Konzept wurde im Mathematikunterricht vermutlich bereits vorgestellt. Die geschwungene Fläche unter dem Funktionsgraphen kann durch unendlich viele unendlich dünne Rechtecksflächen beliebig genau angenähert werden. Das sehen wir in Abb. 4 für $n = 3, 6, 10, 20$ Unterteilungen des Intervalls $[a; b]$. Bei $n = 20$ sieht man schon fast keinen Unterschied mehr zur exakten Fläche.

Bei n gleich großen Unterteilungen des Intervalls $[a; b]$ beträgt der einzelne Schritt auf der x-Achse $\Delta x_n = \frac{b-a}{n}$. Das k-te Rechteck beginnt bei der Stelle x_k, die gegeben ist durch:

$$x_k = a + (k-1)\Delta x_n \qquad \text{mit} \quad k = 1, \ldots, n$$

k nennen wir einen **Laufindex**. Er durchläuft alle Werte von 1 bis n. So erhalten wir beispielsweise für $k = 4$ die Stelle $x_4 = a + 3\Delta x_n$ oder für $k = 15$ die Stelle $x_{15} = a + 14\Delta x_n$.

Die k-te Rechtecksfläche R_k besitzt die Höhe $f(x_k)$ und ihre Fläche beträgt:

$$R_k = f(x_k)\,\Delta x_n$$

Um die gesamte von den n Rechtecken abgedeckte Fläche $R(n)$ zu notieren, empfiehlt sich die **Summenschreibweise**:

$$R(n) = R_1 + \ldots + R_n = \sum_{k=1}^{n} R_k = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x_n$$

Das **Summenzeichen** Σ (gr. Großbuchstabe *Sigma*) besagt, dass alle Terme aufaddiert werden müssen. Unten am Summenzeichen deklariert man den Namen des Laufindexes inkl. Startwert, oben dessen Endwert. Wie liest man so eine Summe mit Summenzeichen vor?

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x_n = \text{"Summe über alle Glieder } f(x_k)\,\Delta x_n \text{ mit } k \text{ von } 1 \text{ bis } n\text{"}$$

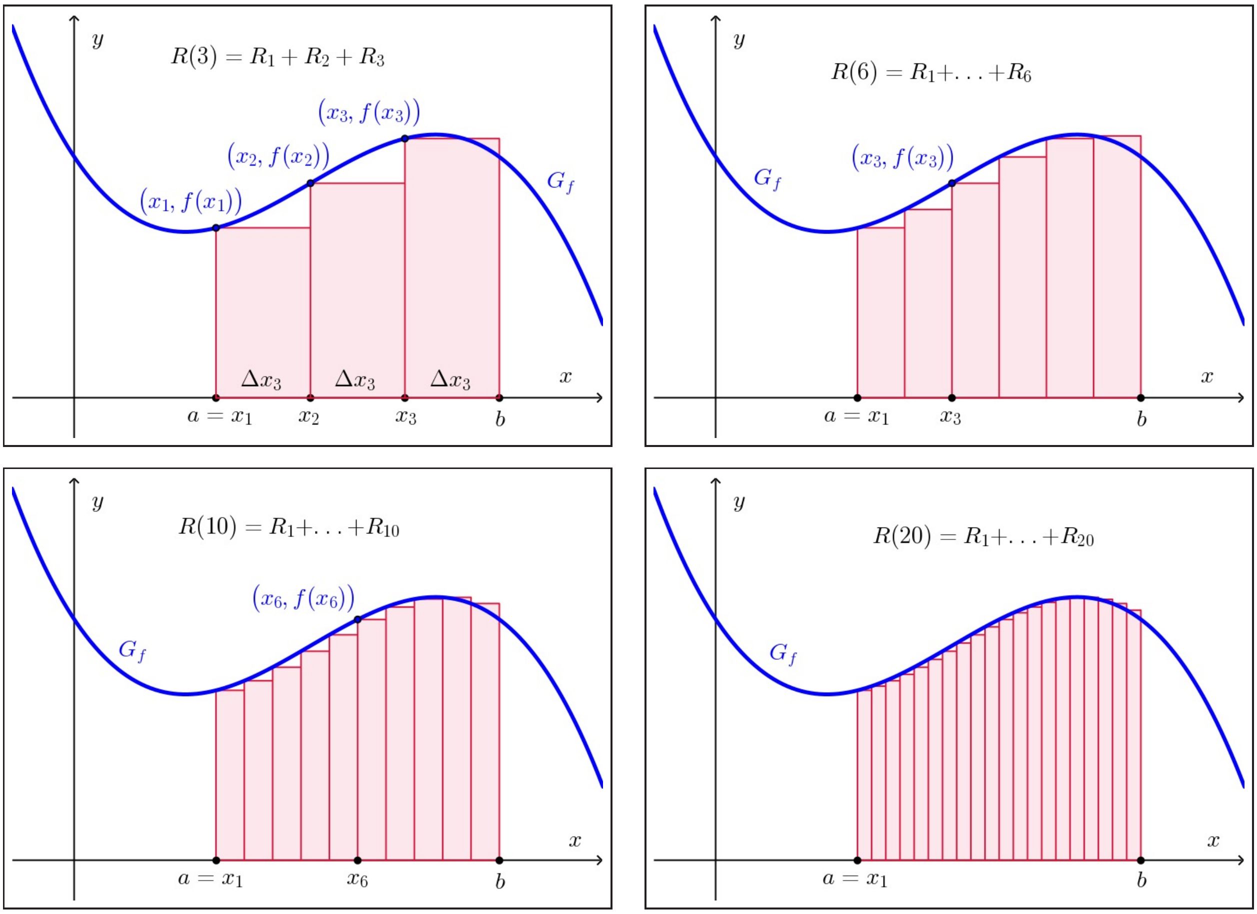

Abbildung 4: Verfeinerung der Rechtecksflächenunterteilung zur Bestimmung der Fläche unter dem Funktionsgraphen. Die Abdeckung wird im Limes $n \to \infty$ unendlich genau.

Ein größeres n entspricht einer verfeinerten Rechtecksunterteilung (vgl. Abb. 4). Lassen wir n immer noch größer werden, so kommt die Rechteckssumme $R(n)$ der exakten Fläche A beliebig nahe. Die exakte Fläche A ist also der Grenzwert von $R(n)$ für $n \to \infty$:

$$A = \lim_{n\to\infty} R(n) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, \Delta x_n \right) \qquad \text{mit} \quad \Delta x_n = \frac{b-a}{n}$$

Das sieht nun doch etwas kompliziert aus. Kein Wunder, dass bereits **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646 – 1716), einer der beiden Väter der Differential- und der Integralrechnung,[2] hierfür eine neue Notation eingeführt hat, nämlich eben das **Integralzeichen**. Wir definieren:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \equiv \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, \Delta x_n \right) \tag{4}$$

Aus dem für $n \to \infty$ immer kleiner werdenden Δx_n rechts ist links der infinitesimale Schritt $\mathrm{d}x$ geworden. Die Summe Σ hat ein neues Zeichen $\int$ erhalten, das die voranstehende Limesbildung $\lim_{n\to\infty}$ mit enthält.[3] In der Integralnotation ist immer noch ersichtlich, dass es sich im Prinzip um eine Summe über Rechtecksflächen handelt: Der Ausdruck $f(x)\,\mathrm{d}x$ ist die Fläche des infinitesimalen Rechtecks an der Stelle x.

[2] Der andere Vater war ein gewisser **Isaac Newton** (1643 – 1727)...

[3] Das Integralzeichen $\int$ ist ein stilisiertes, altdeutsches *langes S*, das für eine neue Art von Summe stehen soll.

2 Weitere allgemeine Bemerkungen zur Integration

2.1 Negative Integralwerte

Mit der Definition des bestimmten Integrals gemäss (4) lösen wir den Integralbegriff vom ursprünglichen Gedanken der Fläche unter einem Funktionsgraphen. Summiert wird über Ausdrücke der Form $f(x_k)\,\Delta x_n$ resp. $f(x)\,\mathrm{d}x$ unter dem Integral. Dabei handelt es sich grundsätzlich einfach um Produkte zweier Zahlen. Folglich müssen wir bei der Interpretation eines Integrals als Fläche etwas vorsichtig sein...

Beispiel 1: Wir möchten die Fläche zwischen dem Graphen der Sinusfunktion $\sin x$ und der x-Achse während einer Periode, also von $x = 0$ bis $x = 2\pi$ bestimmen (vgl. Abb. 5). Ohne groß darüber nachzudenken verwenden wir den Hauptsatz (1) und schreiben:

$$\int_0^{2\pi} \sin x \,\mathrm{d}x = -[\cos x]\Big|_0^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = -(1-1) = 0 \quad ???$$

Dieses Resultat kann ganz offensichtlich nicht für die rote Fläche in Abb. 5 stehen!

Weshalb verschwindet denn dieses Integral? Ganz einfach, weil die Sinusfunktion $\sin x$ auf dem Intervall $[0; 2\pi]$ auch negative Werte annimmt. Für $f(x) < 0$ wird auch $f(x)\,\mathrm{d}x < 0$. Das bedeutet, Flächen unterhalb der x-Achse zählen bei der Berechnung des Integrals negativ. Und weil bei unserer Sinusfunktion innerhalb einer Periode gleich viel Fläche oberhalb und unterhalb der x-Achse liegt, erhalten wir das Resultat 0.

Wollen wir tatsächlich die graue Fläche in Abb. 5 berechnen, so müssen wir die Periode in die Intervalle $[0; \pi]$ und $[\pi; 2\pi]$ unterteilen. Die beiden Teilflächen sind genau gleich groß, sodass wir nur ein Integral zu berechnen brauchen und dessen Wert verdoppeln:

$$A = 2\int_0^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x = -2\,[\cos x]\Big|_0^{\pi} = -2\,(\cos\pi - \cos 0) = -2\,\big((-1)+(-1)\big) = 4$$

Auf Seite 1 hatten wir "der Einfachheit halber" angenommen, dass $f(x) \geq 0$ sein soll für alle $x \in [a; b]$. Damit wollte ich dieser Komplikation mit negativ zählenden Flächenstücken zunächst mal aus dem Weg gehen. Jetzt wissen wir besser Bescheid und diese Einschränkung ist nicht mehr nötig.

Auch über Abschnitte mit negativen Funktionswerten können wir integrieren, solange wir wissen, was wir genau berechnen wollen – das Integral oder die Fläche.

Beispiel 2: Die Parabel zu $f(x) = x^2 - 4x$ ist nach oben geöffnet und schneidet die x-Achse bei den Stellen $x = 0$ und $x = 4$. Für die Fläche zwischen Graph und x-Achse erhalten wir:

$$A = \left|\int_0^4 (x^2 - 4x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2\right]\Bigg|_0^4\right| = \left|\frac{64}{3} - 32 - 0\right| = \left|-\frac{32}{3}\right| = \frac{32}{3}$$

Bei der Berechnung von Flächen unterhalb der x-Achse nehmen wir den Betrag des Integrals.

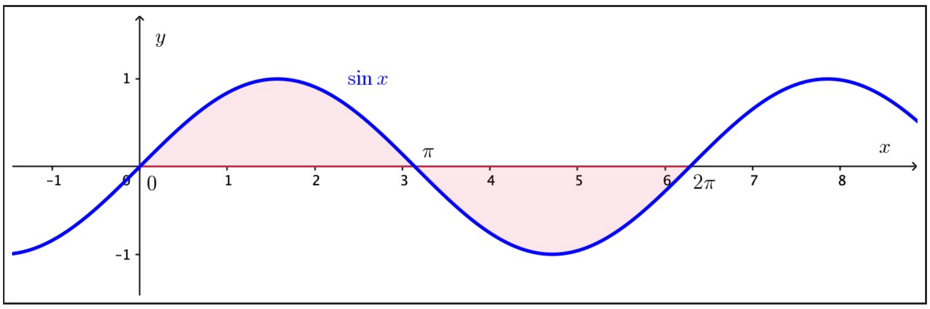

Abbildung 5: Flächenstücke in einer Periode der Sinusfunktion.

2.2 Unbestimmtes Integral, Integrationskonstante und Flächenfunktion

In der Mathematik wurden Integrale auch ohne Angabe von Integrationsgrenzen notiert. Wir sprechen von einem **unbestimmten Integral** und fragen damit nach der Stamm- oder Flächenfunktion $F(x)$:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

Allerdings ist dieses $F(x)$ nur bis auf eine beliebig wählbare **Integrationskonstante** C bestimmt. Das kann nicht anders sein, denn durch Addition einer Konstante C verändert sich die Ableitung einer Funktion $F(x)$ ja nicht:

$$[F(x) + C]' = F'(x) = f(x)$$

Zu einem $f(x)$ gibt es somit unendlich viele Stammfunktionen $F(x)$, die sich lediglich durch eine andere Wahl der Integrationskonstante C voneinander unterscheiden. Für die Berechnung eines bestimmten Integrals ist die Wahl dieses C's belanglos, denn:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) + C - \big(F(a) + C\big) = F(b) - F(a)$$

Aber was für eine Bedeutung hat denn dieses C überhaupt? Die Antwort darauf liegt schon längst bereit. Wir wollen sie nicht verpassen...

Beim Beweis des Hauptsatzes auf Seite 2 haben wir die Flächenfunktion $F(x)$ eingeführt. $F(a)$ stand für die Fläche unter dem Funktionsgraphen von der Stelle $x = 0$ bis zur Stelle $x = a$. Diese Wahl der Flächenfunktion war im Prinzip völlig willkürlich! Weshalb muss sie ausgerechnet bei der Stelle $x = 0$ starten? Genauso gut könnte sie die Fläche von $x = -2$, $x = 7$ oder allgemein von $x = c$ aus berechnen. Dann ergäben sich für $F(a)$ andere Werte, weil die Fläche von $x = c$ bis $x = a$ einfach eine andere wäre. Genau diese Freiheit der Wahl eines beliebigen Startortes $x = c$ für die Flächenfunktion widerspiegelt sich in der Addition einer Integrationskonstanten C.

Abb. 6 verdeutlicht den Gedankengang nochmals anhand zweier verschiedener Flächenfunktionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$, deren Startorte bei $x = c_1$ und $x = c_2$ liegen. Die Integrationskonstante C, die beim Wechsel von $F_1(x)$ zu $F_2(x)$ hinzuaddiert werden muss, entspricht der Fläche resp. dem Integral zwischen den Stellen c_2 und c_1:

$$F_2(x) = F_1(x) + C$$

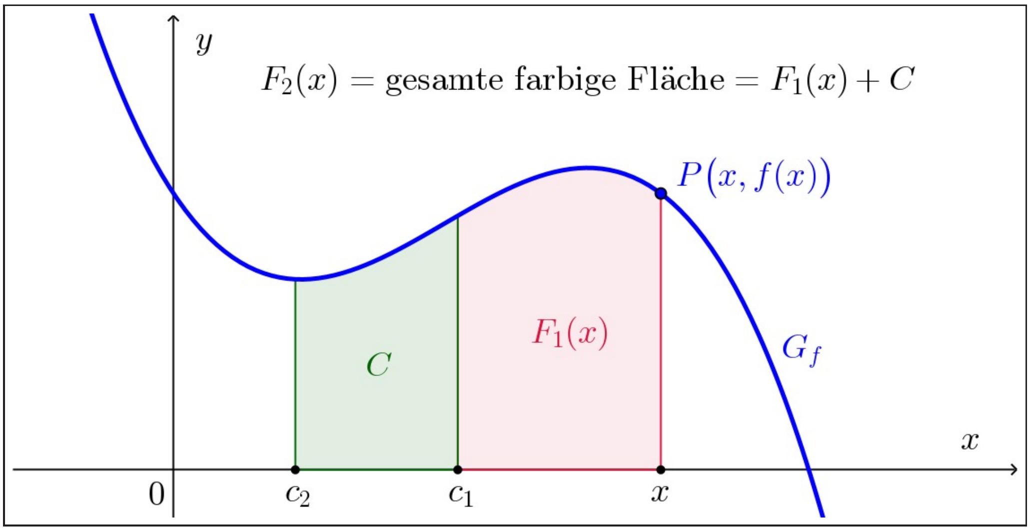

Abbildung 6: Die Addition der Integrationskonstante C geht einher mit dem Wechsel des Startortes der Flächenfunktion.

2.3 Das bestimmte Integral als Veränderung einer Größe

Schauen wir nochmals zurück auf den Hauptsatz (1) und stellen ihn leicht um:

$$F(b) = F(a) + \underbrace{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}_{=\Delta F} \qquad \text{mit} \quad F'(x) = f(x) \tag{5}$$

In dieser Form lässt sich dem Hauptsatz ein anderes und für die Physik sehr hilfreiches Verständnis abgewinnen: Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ beschreibt, wie sich die Größe F von der Stelle a bis zur Stelle b *verändert*. $F(b)$ ist gleich dem Ausgangswert $F(a)$ bei der Stelle a und die Veränderung ΔF entspricht dem bestimmten Integral.

Beispiel: Oftmals wissen wir in der Physik, dass eine Größe die Ableitung einer anderen Größe ist. Z.B. ist in der Kinematik die Momentangeschwindigkeit $v(t)$ die Ableitung der Ortsfunktion $x(t)$ nach der Zeit t – $v(t)$ beschreibt die aktuelle Veränderung des Ortes $x(t)$:

$$v(t) = x'(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad \text{resp.} \qquad \mathrm{d}x = v(t)\,\mathrm{d}t$$

Aus diesem Ableitungszusammenhang folgt aber ebenso der Integralzusammenhang (5) und wir können schreiben:

$$x(t_2) = x(t_1) + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t}_{=\Delta x}$$

Der Ort $x(t_2)$ zum Zeitpunkt t_2 entspricht dem Ort $x(t_1)$ zum Zeitpunkt t_1 plus die Ortsveränderung Δx (= Strecke) während der Zeitspanne von t_1 bis t_2. Diese Veränderung ist durch das bestimmte Integral über die Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$ gegeben ist.

An diesem Beispiel sehen wir, wie richtig es aus physikalischer Sicht ist, dass unsere Flächenfunktion – in diesem Fall $x(t)$ – nur bis auf eine Integrationskonstante bestimmt ist. Dies garantiert uns die **freie Wahl des Bezugssystems**. Wir dürfen selber entscheiden, wo wir den Nullpunkt der Ortsachse platzieren resp. welche Koordinate $x(t_1)$ hat.

Betrachten wir die Angelegenheit nochmals allgemeiner. Mit dem Hauptsatz und mit $\mathrm{d}F = f(x)\,\mathrm{d}x$ können wir schreiben:

$$\Delta F = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{F(a)}^{F(b)} \mathrm{d}F \qquad \text{kurz:} \quad \Delta F = \int_{F(a)}^{F(b)} \mathrm{d}F \tag{6}$$

Die endliche Veränderung ΔF der Grösse $F(x)$ ist stets gleich dem Integral über die infinitesimalen Veränderungen $\mathrm{d}F$. Wir bemerken, dass wir in (6) die Integrationsgrenzen neu anschreiben mussten. Sie müssen stets zur infinitesimalen Veränderung unter dem Integral passen. Zu $\mathrm{d}F$ gehören als Integrationsgrenzen zwangsläufig zwei Werte der Flächenfunktion $F(x)$.

Offenbar dürfen wir unter einem Integral einen infinitesimalen Schritt durch einen anderen ersetzen, wenn wir wissen, wie die beiden voneinander abhängen. Und diese Abhängigkeit ist durch den Ableitungszusammenhang gegeben:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f(x) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}F = f(x)\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \int_{F(a)}^{F(b)} \mathrm{d}F = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Aber eben: Die Integrationsgrenzen wollen an den neuen infinitesimalen Schritt angepasst sein.

Im Abschnitt 3.3 werden wir aus dieser Änderung der Integrationsvariable eine Integrationstechnik mit Namen **Substitution** machen.

2.4 Allgemeine Integrationsregeln

Aus der Integraldefinition (4) können die folgenden allgemeinen Regeln hergeleitet werden:

Summenregel: $$\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Faktorregel: $$\int_a^b c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Aufteilung des Integrals: $$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Umkehrung der Integrationsgrenzen: $$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

In vielen Formelsammlungen und Mathematikbüchern finden sich unter diesen allgemeinen Integrationsregeln auch die Substitution und die partielle Integration. Wir werden diese Integrationstechniken in den Abschnitten 3.2, 3.3 und 3.4 separat betrachten.

2.5 Auswahl unbestimmter Integrale

Mit der Kenntnis diverser Ableitungen lassen sich bereits einige Stammfunktionen aufspüren. Es gibt aber doch die eine oder andere ab und zu auftretende Funktion, bei der wir froh darum sind das unbestimmte Integral rasch nachschlagen zu können. Hier eine Auswahl:

Potenzfunktion: $$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

Reziprozitätsfunktion: $$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

Exponentialfunktion zur Basis e: $$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$$

Logarithmus naturalis: $$\int \ln|x|\,\mathrm{d}x = x\big(\ln|x| - 1\big) + C$$

Sinusfunktion: $$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

Cosinusfunktion: $$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$$

Tangensfunktion: $$\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$$

Quadratische Sinusfunktion: $$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x) + C$$

Quadratische Cosinusfunktion: $$\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x + \sin x\cos x) + C$$

Arcussinusfunktion: $$\int \arcsin x\,\mathrm{d}x = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

Arcuscosinusfunktion: $$\int \arccos x\,\mathrm{d}x = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

Natürlich gibt es weitaus umfangreichere Integralsammlungen. Ich habe mich auf die paar grundlegenden Integrale eingeschränkt, die wir am häufigsten benutzen werden.

3 Integrationstechniken

Die Berechnung bestimmter Integrale ist ein mathematisches Handwerk. In einfacheren Fällen möchte man möglichst elegant, in schwierigeren Fällen überhaupt zum Ziel kommen. Leider gibt es kein Standardrezept. Im schlimmsten Fall lassen wir uns von einem Rechner einen Näherungswert auf soundso viele Stellen genau berechnen. Aber am liebsten haben wir es mathematisch exakt!

In diesem Abschnitt lernen wir ein paar Tricks und Techniken zur exakten Berechnung von bestimmten Integralen kennen, denen wir im Rahmen der Quantenmechanik oft begegnen werden.

3.1 Symmetrien erkennen und ausnutzen

Gerade Funktionen / Achsensymmetrie: Der Graph einer sogenannt **geraden Funktion** zeigt eine Achsensymmetrie bezüglich der y-Achse des Koordinatensystems (vgl. Abb. 7). Für solche Funktionen gilt:

$$f(-x) = f(x)$$

Typische Beispiele sind $\cos x$, c, x^2, $\frac{1}{x^2}$ oder e^{-x^2}.

Bei einer zum Ursprung symmetrischen Integration folgt für gerade Funktionen (vgl. Abb. 8):

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Das ist sehr praktisch, weil das Einsetzen der Stelle $x = 0$ in die Stammfunktion typischerweise besonders einfach ist.

Ungerade Funktionen / Punktsymmetrie: Der Graph einer **ungeraden Funktion** zeigt eine Punktsymmetrie des Funktionsgraphen bezüglich des Koordinatenursprungs $(0, 0)$ (vgl. Abb. 7). Für solche Funktionen gilt:

$$f(-x) = -f(x)$$

Typische Beispiele sind $\sin x$, $\tan x$, x, x^3 oder $\frac{1}{x}$.

Bei Integration von $-a$ bis a folgt für ungerade Funktionen (vgl. Abb. 8):

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Die Punktsymmetrie macht diese Integration also ganz besonders leicht!

Aufgrund dieser allenfalls möglichen Vereinfachungen lohnt es sich immer vor dem Integrieren über die Symmetrieeigenschaften einer Funktion nachzudenken!

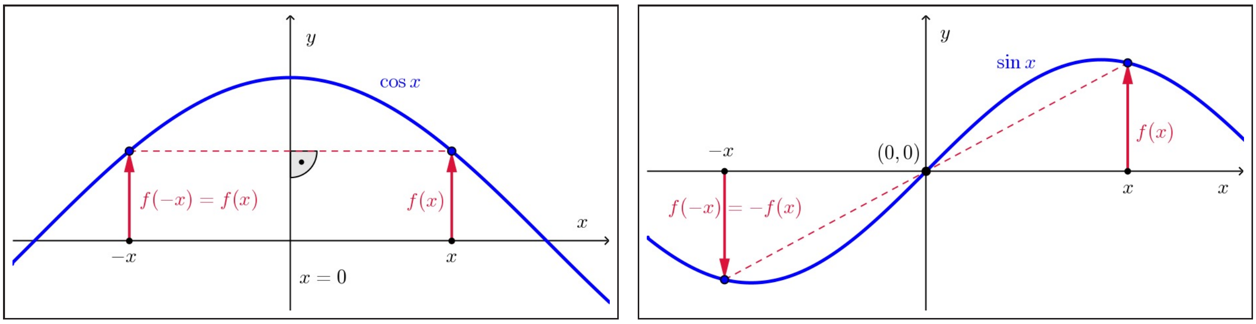

Abbildung 7: $\cos x$ und $\sin x$ als Beispiele für gerade und ungerade Funktionen.

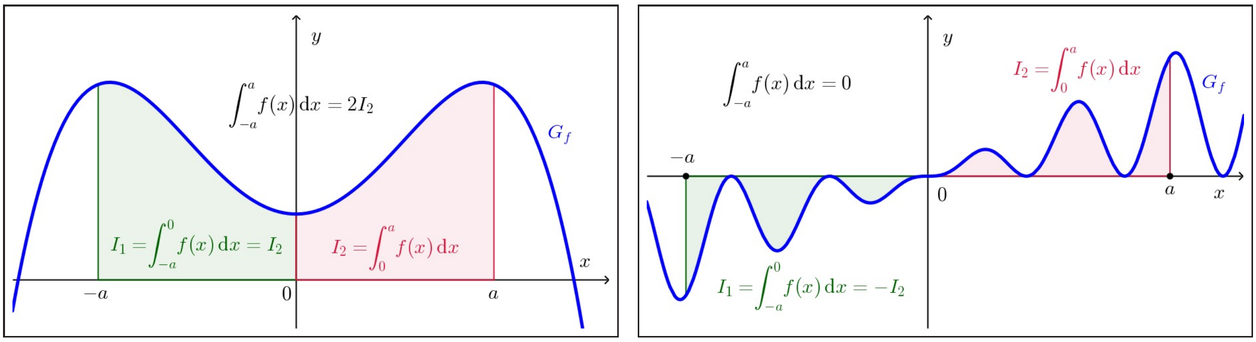

Abbildung 8: Symmetrische Integrale bei geraden und ungeraden Funktionen

Weitere Anmerkungen zu Symmetrieeigenschaften von Funktionen

- Der Kehrwert $\frac{1}{f(x)}$ einer geraden oder ungeraden Funktion $f(x)$ besitzt immer noch dieselbe Symmetrie.
- Verknüpfungen von geraden (g) und/oder ungeraden (u) Funktionen durch Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division beeinflussen die Symmetrieeigenschaften wie folgt:

$+/-$	g	u
g	$\to g$	$\bullet$
u	$\bullet$	$\to u$

$\bullet$ = "keine Symmetrie"

$\cdot\ /\ :$	g	u
g	$\to g$	$\to u$
u	$\to u$	$\to g$

- Generell ist es sehr nützlich von möglichst vielen elementaren Funktionen ein ungefähres Bild des Graphen im Kopf zu haben. Dazu gehören natürlich auch allfällige Symmetrieeigenschaften. So verpasst man es nicht von obigen Vereinfachungen bei der Integration von geraden und ungeraden Funktionen, wann immer möglich, zu profitieren.

Beispiel 1: Das Polynom $f(x) = -\frac{x^4}{4} + x^2 + \frac{1}{2}$ besitzt lauter Terme mit geraden Potenzen von x ($\frac{1}{2} = \frac{x^0}{2}$). Somit handelt es sich um eine gerade Funktion, deren Graph links in Abb. 8 gezeigt wird. Für das Integral von $-a = -\frac{3}{2}$ bis $a = \frac{3}{2}$ ergibt sich:

$$\int_{-3/2}^{3/2} \left(-\frac{x^4}{4} + x^2 + \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}x = 2 \cdot \int_{0}^{3/2} \left(-\frac{x^4}{4} + x^2 + \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}x = 2 \cdot \left[-\frac{x^5}{20} + \frac{x^3}{3} + \frac{x}{2}\right]\Bigg|_0^{3/2}$$

$$= 2 \cdot \left(-\frac{243}{640} + \frac{9}{8} + \frac{3}{4} - 0\right) = \frac{-243 + 720 + 480}{320} = \frac{957}{320}$$

Beispiel 2: Das folgende Integral soll berechnet werden:

$$\int_{-a}^{a} \frac{1}{2} x \sin^2 x \,\mathrm{d}x$$

Wir bemerken zuerst die Symmetrie der Integrationsgrenzen bezüglich des Ursprungs. Unter dem Integral steht ein Produkt zweier Funktionen. Die Funktion $f(x) = x$ ist ungerade, während $g(x) = \sin^2 x$ wegen dem Quadrat eine gerade Funktion ist.[4] Der Faktor $\frac{1}{2}$ spielt für die Symmetrie keine Rolle. Die ganze Funktion $\frac{1}{2} f(x)\, g(x) = \frac{1}{2} x \sin^2 x$ ist also ungerade (vgl. Abb. 8 rechts). Somit muss dieses Integral gleich 0 sein!

[4] Die Sinusfunktion ist ungerade. Durch das Quadrat in $\sin^2 x$ werden also zwei ungerade Funktionen miteinander multipliziert, was eine gerade Funktion ergibt.

3.2 Erkennen äusserer und innerer Ableitungen

Wer effizient integrieren will, sollte in Sachen Kettenregel (bei der Ableitung) geübt sein und somit über ein geschultes Auge punkto innere Ableitungen verfügen. Dieses geschulte Auge holt man sich nur durch eine gute Kenntnis der Ableitungen verschiedenster elementarer Funktionen und vor allem durch viel Erfahrung und Übung.

Erinnern wir uns: Bei der Differentiation erklärte uns die Kettenregel, wie eine verschachtelte Funktion abgeleitet werden muss:

$$\big[u\big(v(x)\big)\big]' = u'\big(v(x)\big) \cdot v'(x)$$

Erkennen wir nun eine Funktion unter einem Integral als Produkt $f(x) = u'\big(v(x)\big) \cdot v'(x)$ der Ableitungen einer äußeren und einer inneren Funktion, so ist die Stammfunktion eben gegeben durch $F(x) = u\big(v(x)\big) + C$ und wir erhalten für das bestimmte Integral:

$$\int_a^b u'\big(v(x)\big) \cdot v'(x)\,\mathrm{d}x = u\big(v(x)\big)\Big|_a^b \tag{7}$$

Wie zielführend diese Methode ist, möchte ich an drei erläuterten Beispielen zeigen:

Beispiel 1: $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} x \cdot e^{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,e^{x^2}\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\big(e^2 - e\big) = \frac{e}{2}\,(e-1)$

Beispiel 2: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\sin^2 x\,\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

Beispiel 3: $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \ln(x^2+1)\,\Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

Beispiel 1: Äußere Funktion $u(v) = \frac{1}{2}\,e^v$ mit Ableitung $u'(v) = \frac{1}{2}\,e^v$; innere Funktion $v(x) = x^2$ mit Ableitung $v'(x) = 2x$.[5]

Im Nachhinein kann man die Richtigkeit stets leicht überprüfen, denn Ableiten ist typischerweise einfacher als Integrieren:

$$\left[\frac{1}{2}\,e^{x^2}\right]' = \frac{1}{2}\,e^{x^2} \cdot 2x = x \cdot e^{x^2}$$

Beispiel 2: Äußere Funktion $u(v) = \frac{1}{2}\,v^2$ mit Ableitung $u'(v) = \frac{1}{2} \cdot 2v = v = \sin x$; innere Funktion $v(x) = \sin x$ mit Ableitung $v'(x) = \cos x$.

Wir hätten auch $\cos x$ als innere Funktion mit Ableitung $\sin x$ auffassen können. Dann hätte die äußere Funktion $u(v) = -\frac{1}{2}\,v^2$ gelautet und wir hätten gleichermaßen erhalten:

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \cos x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos^2 x\,\Big|_0^{\pi/2} = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

An diesem Beispiel sieht man sehr schön, dass sich unterschiedliche Stammfunktionen ergeben können. Ganz offensichtlich ist $\frac{1}{2}\,\sin^2 x \neq -\frac{1}{2}\cos^2 x$. Die beiden Funktionsgraphen verlaufen parallel übereinander und unterscheiden sich lediglich um eine Integrationskonstante $C = \frac{1}{2}$. Für das bestimmte Integral spielt dieser Unterschied keine Rolle.

Beispiel 3: Äußere Funktion $u(v) = \ln v$ mit Ableitung $u'(v) = \frac{1}{v}$; innere Funktion $v(x) = x^2 + 1$ mit Ableitung $v'(x) = 2x$. Zum Schluss habe ich verwendet, dass $\log_a 1 = 0$ ist.

[5] Es sei daran erinnert, dass $a^{b^c} \equiv a^{(b^c)}$ $(\neq (a^b)^c)$.

3.3 Lineare Substitution

Oftmals taucht die Integrationsvariable x innerhalb der Funktion $f(x)$, über die integriert wird, in einem linearen Ausdruck $mx+q$ auf. In diesem Fall ist es hilfreich $mx+q$ durch eine neue Integrationsvariable $s = mx+q$ zu **substitutieren** ($=$ ersetzen). In der Funktion sollen gar keine x mehr vorkommen. D.h., wir ersetzen wirklich alle x und schreiben für die Funktion nur noch $f(s)$. Aus dem infinitesimalen Schritt $\mathrm{d}x$ wird $\mathrm{d}s$. Dabei müssen wir berücksichtigen, dass:

$$s = mx+q \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = s' = m \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}s}{m}$$

Auch die Integrationsgrenzen müssen in s-Werte umgerechnet werden. Insgesamt folgt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{m}\cdot\int_{ma+q}^{mb+q} f(s)\,\mathrm{d}s \tag{8}$$

Im Moment erkennen wir vielleicht noch nicht so richtig, wie die Sache läuft resp. was sie bringt. Die folgenden paar Beispiele sollen Licht ins Dunkel bringen.

Beispiel 1: Verschiebungstrick ($m = 1$)

Wir betrachten das folgende Integral:

$$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$$

Das sieht ein bisschen unschön aus. Von $\frac{1}{\sqrt{x}}$ kennen wir dank der Integrationsregel für Potenzfunktionen die Stammfunktion (vgl. Abschnitt 2.5). Aber wie sieht es mit der -1 unter der Wurzel aus? Was verändert diese Subtraktion?

In der Mathematik wurde erklärt, dass die Ersetzung aller Variablen x in einer Funktionsgleichung durch den Ausdruck $x-1$ den Graphen der Funktion um 1 nach rechts verschiebt. Machen wir das Umgekehrte, ersetzen wir also $x-1$ durch x, so bedeutet dies eine Verschiebung um 1 nach links.

Das nützen wir hier aus und setzen eine neue Integrationsvariable $s = x-1$ an. Damit verschieben wir im Prinzip den Funktionsgraphen um 1 nach links (vgl. Abb. 9). Es leuchtet ein, dass dann auch die Integrationsgrenzen um 1 nach links verschoben werden müssen, damit wir immer noch dasselbe Integral berechnen.

Zunächst betrachten wir aber den neuen infinitesimalen Schritt:

$$m = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = s' = [x-1]' = 1$$

Solange also die Steigung m in unserer linearen Substitution $s = mx+q$ gleich 1 ist, verändert sich am infinitesimalen Schritt gar nichts, $\mathrm{d}s = \mathrm{d}x$. Es folgt:

$$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = \int_{2-1}^{5-1} \frac{1}{\sqrt{s}}\,\mathrm{d}s = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{s}}\,\mathrm{d}s$$

Das sieht schon freundlicher aus! Aus der Integrationsregel für Potenzfunktionen erhalten wir:

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{s}}\,\mathrm{d}s = \int_1^4 s^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}s = 2s^{\frac{1}{2}}\Big|_1^4 = 2\sqrt{s}\Big|_1^4 = 2\big(\sqrt{4}-\sqrt{1}\big) = 2$$

Bemerkung: Das anfängliche Integral hätten wir auch berechnen können, wenn wir uns klar gemacht hätten, dass die 1 im Zähler von $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ als Ableitung der inneren Funktion $v(x) = x-1$ und $u'(v) = \frac{1}{\sqrt{v}}$ als Ableitung der äußeren Funktion $u(v) = 2\sqrt{v}$ angesehen werden können:

$$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x-1}\,\Big|_2^5 = 2\big(\sqrt{4}-\sqrt{1}\big) = 2$$

Beim Integrieren gibt es ab und zu also durchaus mehrere Wege, die zum Ziel führen.

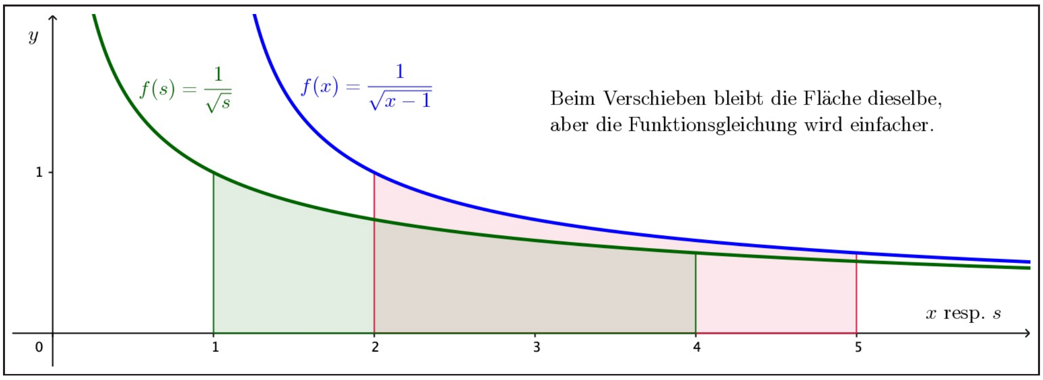

Abbildung 9: Die Substitution $s = x - 1$ verschiebt den Graphen von $f(x)$ um 1 nach links. Die Integrationsgrenzen werden mit verschoben, sodass die Integrationsfläche gleich groß bleibt.

Beispiel 2: Reskalierungstrick ($q = 0$)

Oftmals taucht x innerhalb einer Funktion zusammen mit einem Vorfaktor auf, so z.B. in:

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos(3x)\,\mathrm{d}x$$

Gerne würden wir nur über $\cos x$ integrieren. Daher lautet unsere Substitution $s = 3x$.

Ein Funktionsgraph wird bei der Ersetzung aller x durch $3x$ um den Faktor 3 horizontal gestaucht. Hier machen wir genau das Umgekehrte. Wir ersetzen $3x$ durch die Variable s, was eine horizontale Dehnung um den Faktor 3 bewirkt (vgl. Abb. 10). Dem entsprechend müssen die Integrationsgrenzen verschoben werden, um das Integral immer noch "an denselben Stellen" im Verlauf des Graphen zu begrenzen. Durch die Dehnung wird die Fläche effektiv vergrößert. Dies wird durch die Veränderung des infinitesimalen Schrittes ausgeglichen:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = s' = [3x]' = 3 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}s}{s'} = \frac{\mathrm{d}s}{3}$$

Insgesamt folgt für unser Integral:

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos(3x)\,\mathrm{d}x = \int_{3\cdot\pi/6}^{3\cdot\pi/3} \cos s\,\frac{\mathrm{d}s}{3} = \frac{1}{3}\cdot\int_{\pi/2}^{\pi} \cos s\,\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\cdot\sin s\Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{1}{3}\cdot(0-1) = -\frac{1}{3}$$

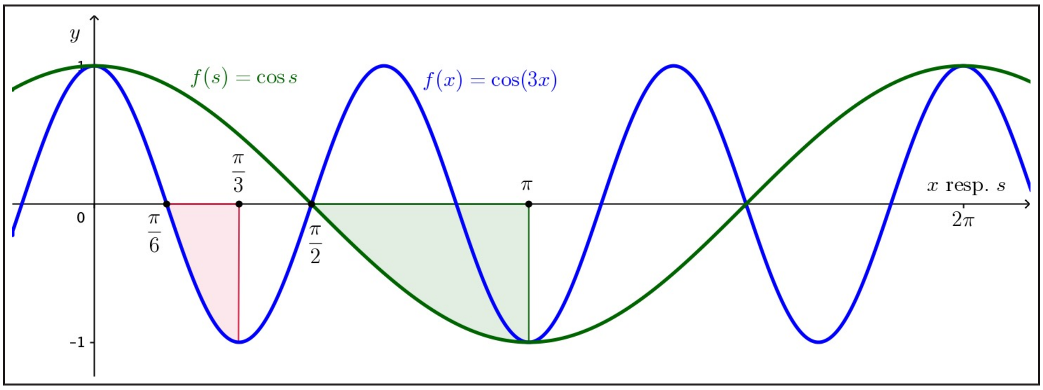

Abbildung 10: Die Substitution $s = 3x$ dehnt den Graphen von $f(x)$ horizontal um den Faktor 3. Die Integrationsgrenzen werden mit gestreckt. Dadurch wird offensichtlich die Fläche vergrößert, was beim Integral mit einer Division durch den Streckungsfaktor 3 ausgeglichen werden muss.

Beispiel 3: Lineare Substitution komplett ($m \neq 1, q \neq 0$)

Verschiebungs- und Reskalierungstrick sind nur Spezialfälle der am Anfang des Abschnittes beschriebenen allgemeinen linearen Substitution $s = mx + q$. Beim Verschiebungstrick ist $m = 1$, beim Reskalierungstrick ist $q = 0$. Im allgemeinen Fall ($m \neq 1$ und $q \neq 0$) Wird der Funktionsgraph sowohl horizontal verschoben, wie auch gestreckt oder gestaucht. Beispiel:

$$f(x) = \frac{1}{\frac{1}{3}x - 4} \quad \text{mit} \quad s = \frac{1}{3}x - 4 \qquad \Rightarrow \qquad f(s) = \frac{1}{s} \quad \text{und} \quad m = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{3}$$

Damit finden wir beim folgenden Integral:

$$\int_{15}^{21} \frac{1}{\frac{1}{3}x - 4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\frac{1}{3}} \cdot \int_{\frac{1}{3}\cdot 15-4}^{\frac{1}{3}\cdot 21-4} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = 3 \cdot \int_1^3 \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = 3 \cdot \ln|s|\Big|_1^3 = 3\ln 3$$

Wir bemerken, dass in dieser allgemeinen linearen Substitution die horizontale Verschiebung nicht einfach der Zahl q entspricht. Vielmehr muss man den Streckungs- resp. Stauchungsfaktor m ausklammern, um die effektive Verschiebung zu sehen. Sie ist gegeben durch $\frac{q}{m}$. Im Beispiel:

$$s = \frac{1}{3}x - 4 = \frac{1}{3}(x - 12) \quad \Rightarrow \quad \text{Verschiebung um } 12 \text{ nach links}$$

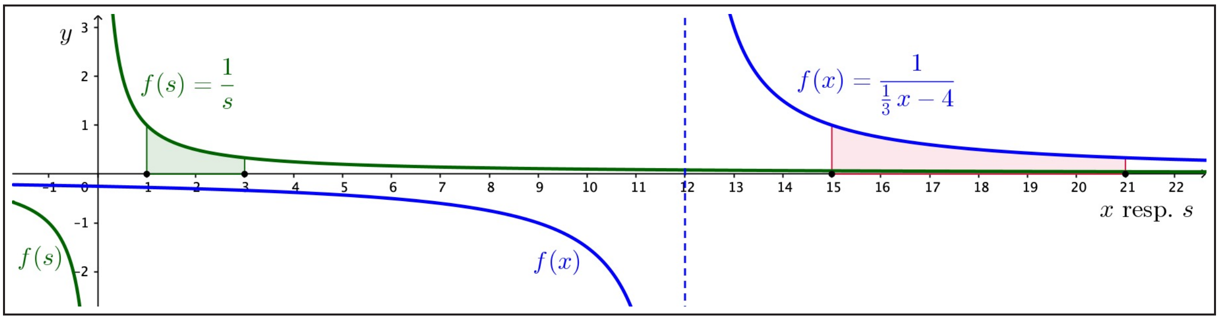

Abbildung 11: Die Substitution $s = \frac{1}{3}x - 4 = \frac{1}{3}(x - 12)$ verschiebt den Graphen horizontal um 12 nach links. Danach wird er mit dem Faktor 3 zur y-Achse hin gestaucht. Die Integrationsgrenzen müssen entsprechend mit verschoben werden. Durch die Stauchung wird die Fläche verkleinert, was beim Integral durch eine Multiplikation mit dem Stauchungsfaktor 3 ausgeglichen werden muss.

Zum Schluss dieses Abschnittes sei angefügt, dass die lineare Substitution einem Erkennen von äußerer und innerer Ableitung entspricht. Anstatt lange zu theoretisieren zeige ich an einem Beispiel, wie das gemeint ist.

Beispiel 4: Das folgende Integral berechnen wir mit der linearen Substitution $s = 2x - \frac{\pi}{3}$:

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi/6} \cos s\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2} \cdot \sin s\Big|_0^{\pi/6} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{1}{4}$$

Andererseits erkennen wir aber auch, dass der Cosinus die Ableitung einer äußeren Funktion mit innerer Funktion $2x - \frac{\pi}{3}$ ist. Die konstante Ableitung der linearen inneren Funktion, also der Faktor 2, ist nicht sichtbar. D.h., es braucht einen zusätzlichen Faktor $\frac{1}{2}$, der diese innere Ableitung wegschafft. Die Stammfunktion lautet somit $\frac{1}{2}\sin(2x - \frac{\pi}{3})$ und wir erhalten:

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{4}$$

Je mehr Übung wir haben, desto selbstverständlicher werden diese Rechnungen.

3.4 Partielle Integration

Diese ebenfalls sehr nützliche Integrationstechnik bedient sich der Produktregel beim Ableiten. Wir erinnern uns:

$$[u(x)\,v(x)]' = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$$

Integrieren wir über beide Seiten, so ergibt sich:

$$\int_a^b [u(x)\,v(x)]'\ \mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Nun steht auf der linken Seite aber das Integral über der Ableitung von $u(x)\,v(x)$. Eine Stammfunktion dazu ist $u(x)\,v(x)$ selber, woraus folgt:

$$[u(x)\,v(x)]\,\Big|_a^b = \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Durch Umstellen finden wir:

$$\int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)\,v(x)]\,\Big|_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x \tag{9}$$

Diese Beziehung bezeichnet man als **partielle Integration**, weil von der Funktion $f(x) = u'(x)\,v(x)$ quasi nur der "Part" resp. Anteil $u'(x)$ integriert, also aufgeleitet wird. Damit ist die Integration von $f(x) = u'(x)\,v(x)$ noch nicht abgeschlossen, vielmehr hat man das Problem auf die Berechnung des Integrals über $g(x) = u(x)\,v'(x)$ verlagert. Dieses ist aber unter Umständen wesentlich leichter zu berechnen, sodass sich die partielle Integration ausbezahlt.

Die nachfolgenden Beispiele demonstrieren den Nutzen der partiellen Integration.

Beispiel: Das folgende Integral ist ein Kandidat für eine partielle Integration, weil wir in ihm ein Produkt zweier Funktionen entdecken:

$$\int_0^{\pi/2} x\,\cos x\ \mathrm{d}x$$

Mit unseren bisherigen Methoden kommen wir hier nicht weiter. Der Faktor x vor der Cosinusfunktion erschwert die Sache. Nur $\cos x$ – oder $\sin x$ – wäre ja völlig unproblematisch. Aber genau dies können wir durch die partielle Integration erreichen mit der das Integral in gewisser Weise ausgetauscht werden kann. Wir identifizieren $u'(x) = \cos x$ und $v(x) = x$. Dann sind $u(x) = \sin x$ und $v'(x) = 1$, sodass $u(x)v'(x) = \sin x$. Somit erhalten wir:

$$\int_0^{\pi/2} x\,\cos x\,\mathrm{d}x = x\,\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - 0 + (\cos x)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} + (0-1) = \frac{\pi}{2} - 1$$

In die "andere Richtung" mit $u'(x) = x$ und $v(x) = \cos x$ bringt die partielle Integration keine Verbesserung:

$$\int_0^{\pi/2} x\,\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,x^2\,\cos x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\,x^2 \sin x\,\mathrm{d}x = \,??$$

4 Uneigentliche Integrale

Manchmal kommt es vor, dass die Funktion $f(x)$, über die integriert wird, bei einer Integrationsgrenze $\varkappa$ gar nicht definiert ist, sei es, weil es sich bei $\varkappa$ um eine Definitionslücke von $f(x)$ oder weil die Integrationsgrenze gleich $\pm\infty$ ist und somit selber für keine reelle Zahl steht. In einem solchen Fall sprechen wir von einem **uneigentlichen Integral** und wir müssen kurz deklarieren, was darunter zu verstehen ist:

Definition uneigentlicher Integrale

Ein Integral bis zu einer Stelle $\varkappa$ heißt **uneigentlich**, *wenn $\varkappa$ eine Definitionslücke von $f(x)$ oder gleich $\pm\infty$ ist. Den Wert des uneigentlichen Integrals definieren wir als Grenzwert eines problemlos berechenbaren Integrals:*

$$\int_a^{\varkappa} f(x)\,\mathrm{d}x \equiv \lim_{b\to\varkappa}\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) \tag{10}$$

Der Parameter b soll zwischen a und $\varkappa$ liegen. Natürlich kann das Integral auch aufgrund der unteren oder sogar aufgrund beider Integrationsgrenzen uneigentlich sein. Das Verfahren bleibt dasselbe. In letzterem Fall braucht es dann zwei Limesbildungen.
Bei uneigentlichen Integralen kann es vorkommen, dass der Grenzwert gar nicht gebildet und somit für das Integral kein Wert berechnet werden kann.

Ein paar Beispiele zeigen, dass die Sache relativ einfach ist. Mit etwas Übung wird es nur selten notwendig sein aus Verständnisgründen die Grenzwertbildung ganz ausführlich zu betrachten.

Beispiel 1: Die Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ besitzt bei $x = 0$ eine Polstelle. Somit ist das folgende Integral uneigentlich, aber es lässt sich trotzdem berechnen:

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \equiv \lim_{a\to 0}\left(\int_a^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\right) = \lim_{a\to 0}\left(2\sqrt{x}\,\Big|_a^4\right) = 2\lim_{a\to 0}\left(\sqrt{4}-\sqrt{a}\right) = 2(2-0) = 4$$

Dies war die ausführliche Notation. Wir scheuen uns meistens aber nicht vor einer etwas salopperen Schreibweise ohne Limesbildung:

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\,\Big|_0^4 = 2\left(\sqrt{4}-\sqrt{0}\right) = 4$$

Wichtig ist einfach, dass wir um die exaktere Schreibweise mit der Limesbildung wissen und diese in kritischen Fällen hervornehmen können.

Links in Abb. 12 sehen wir die graphische Bedeutung unseres Resultates: Die Fläche unter dem Funktionsgraphen zwischen $x = 0$ und $x = 4$ ist offenbar endlich groß, auch wenn die Funktionswerte für $x \to 0$ unendlich groß werden.

Beispiel 2: Betrachten wir nun ein Integral, dessen rechte Integrationsgrenze im Unendlichen liegt:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x \equiv \lim_{b\to\infty}\left(\int_0^b e^{-x}\,\mathrm{d}x\right) = \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-x}\,\Big|_0^b\right) = -\lim_{b\to\infty}\left(e^{-b}-e^0\right) = -(0-1) = 1$$

Auch hier sind wir gerne etwas schludriger, aber eben speditiver unterwegs:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = -e^{-x}\,\Big|_0^{+\infty} = -(0-1) = 1$$

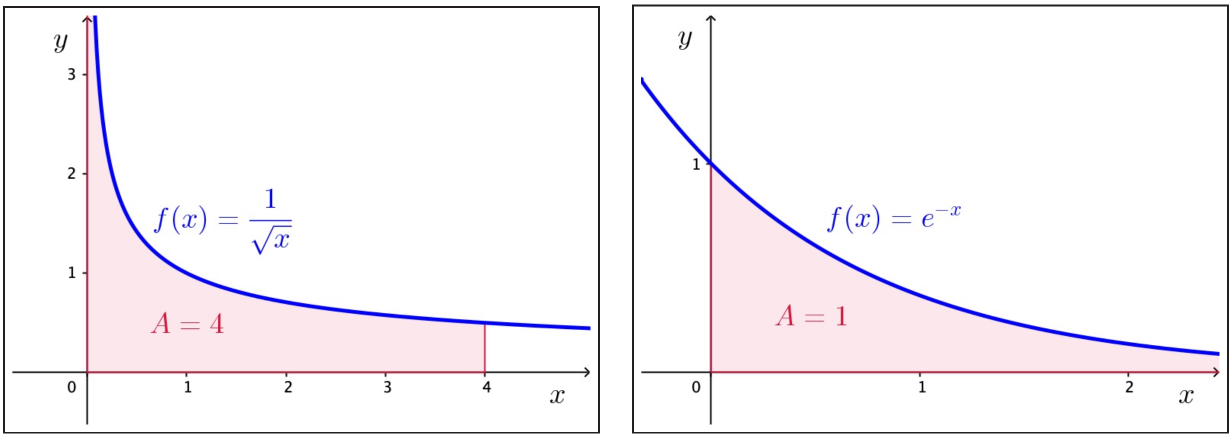

Abbildung 12: Beispiele uneigentlicher Integrale: An den Integrationsgrenzen undefinierte Funktionen können trotzdem endliche Flächen eingrenzen.

Beispiel 3: Nach den ersten beiden Beispielen könnte man den Eindruck erhalten, dass sich jedes uneigentliche Integral berechnen lässt. Hier sehen wir, dass dem überhaupt nicht so sein muss:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \equiv \lim_{b\to\infty}\left(\int_1^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right) = \lim_{b\to\infty}\left(\ln|x|\,\Big|_1^b\right) = \lim_{b\to\infty}(\ln b - \ln 1) = \text{undefiniert}$$

Der Logarithmus naturalis ist eine monoton wachsende Funktion, sodass $\lim_{b\to\infty} \ln b = \infty$ und der Grenzwert somit undefiniert ist. Damit existiert dieses uneigentliche Integral nicht.

5 Spezielle bestimmte Integrale

In der Quantenmechanik werden wir ein paar bestimmte Integrale verwenden, deren Herleitung in ein paar Fällen den Rahmen der uns zur Verfügung stehenden Mathematik sprengen würde:

Exponentialintegral:
$$\int_0^\infty x^n\, e^{-x/a}\,\mathrm{d}x = n!\,a^{n+1} \qquad \text{mit} \quad a>0, n\in\mathbb{N}$$

Gauss'sche Integrale:
$$\int_0^\infty e^{-x^2/a^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\,\frac{a}{2} \qquad \text{mit} \quad a>0$$
$$\int_0^\infty x^{2n}\, e^{-x^2/a^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\,\frac{(2n)!}{n!}\left(\frac{a}{2}\right)^{2n+1} \qquad \text{mit} \quad a>0, n\in\mathbb{N}$$
$$\int_0^\infty x^{2n+1}\, e^{-x^2/a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{n!}{2}\,a^{2n+2} \qquad \text{mit} \quad a>0, n\in\mathbb{N}$$

Trigo-Integrale:
$$\int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{für } m\neq n \\ \pi & \text{für } m=n \end{cases} \qquad \text{mit} \quad m,n\in\mathbb{Z}$$
$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{für } m\neq n \\ \pi & \text{für } m=n \end{cases} \qquad \text{mit} \quad m,n\in\mathbb{Z}$$
$$\int_0^{2\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{mit} \quad m,n\in\mathbb{Z}$$
$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \qquad \text{mit} \quad a>0$$
$$\int_0^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$