Ergänzungen zur Quantenphysik

Klassische Elektrodynamik & elektromagnetische Wellen

1 Entstehung der Elektrodynamik und Maxwell-Gleichungen

1820 begann das Zeitalter des Elektromagnetismus. In jenem Jahr beobachtete der dänische Physiker **Hans Christian Oersted** (1777 – 1851), dass eine Kompassnadel durch den elektrischen Strom in einem sich in der Nähe befindenden Kabel beeinflusst wird. Er schloss daraus, dass Elektrizität und Magnetismus fundamental miteinander verknüpfte Phänomene sein müssen. Ab diesem Moment widmete sich ein Grossteil der Laboratorien ein halbes Jahrhundert lang intensiv diesem neuen und fundamentalen Forschungsgebiet und eine ganze Reihe namhafter Wissenschafter – klingende Namen wie Faraday, Ampère oder Gauss – lieferte die Puzzlesteine, die es letztlich zu einer umfassenden Theorie des Elektromagnetismus zu kondensieren galt.

Genau diese theoretische Vereinigung schloss schliesslich im Jahre 1865 der schottische Physiker **James Clerk Maxwell** (1831 – 1879) ab. In seinem Werk *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field* fasste er bereits bekannte Gleichungen für das elektrische und das magnetische Feld neu zusammen und ergänzte sie geschickt durch einen weiteren Term, der das ganze Gleichungssystem zu einer in sich geschlossenen Theorie abrundete. Die **klassische Elektrodynamik** war formuliert.

Maxwell selber notierte seine Gleichungen noch nicht ganz so kompakt, wie das heute üblich ist. Diese formale Verbesserung wurde von ein paar weiteren Theoretikern vorgenommen und führte auf die vier sogenannten **Maxwell-Gleichungen**. Sie lauten:

Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\varrho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r},t) =$ elektrischer Feldvektor

$\vec{B} = \vec{B}(\vec{r},t) =$ magnetischer Feldvektor

$\varrho = \varrho(\vec{r},t) =$ Ladungsdichte

$\vec{j} = \vec{j}(\vec{r},t) =$ Stromdichte

$\mu_0 =$ magnetische Feldkonstante $= 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$

$\varepsilon_0 =$ Dielektrizitätskonstante $= 8.854\cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}$

Die Maxwell-Gleichungen sind sogenannte **partielle Differentialgleichungen** für das elektrische und das magnetische Feld. Sie beschreiben, wie sich das magnetische Feld $\vec{E}$ und das magnetische Feld $\vec{B}$ verhalten. Es sind **dynamische Feldgleichungen**, weil sie Zusammenhänge zwischen den zeitlichen und örtlichen Veränderungen (= Ableitungen) der Feldvektoren $\vec{E}$ und $\vec{B}$ herstellen. $\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ und $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ stehen für Ableitungen nach der Zeit t und der **Nabla-Operator** $\vec{\nabla}$ ist als eine Art Ableitung nach dem Ort zu verstehen. $\vec{E}(\vec{r},t)$ und $\vec{B}(\vec{r},t)$ sind sogenannte **Vektorfelder**. Das bedeutet, jedem Ort $\vec{r}$ wird zu jedem Zeitpunkt t ein Vektor $\vec{E}$ und ein Vektor $\vec{B}$ zugeordnet. Beide Vektorfelder zusammen müssen die Maxwell-Gleichungen an jedem Ort $\vec{r}$ und zu jedem Zeitpunkt t erfüllen.

Natürlich musste die Theorie noch auf Herz und Nieren getestet werden. Sie bewährte sich aber dermassen umfassend, dass sie bald als eines der Prunkstücke der Physik des 19. Jahrhunderts angesehen wurde – eine Perspektive, die wir auch heute noch teilen und uns vor der praktischen und theoretischen Arbeit der damaligen Forscher verneigen. Viele Forschungsleistungen wären zu nennen, aber ich möchte vor allem die Arbeit von **Heinrich Hertz** (1857 – 1894) erwähnen, der es im Jahr 1886 fertigbrachte, aufgrund Maxwells Theorie zum ersten Mal eine elektromagnetische Welle (im Ultrakurzwellenbereich $f\approx 80\,\mathrm{MHz}$) experimentell auszusenden und zu empfangen. Zum ersten Mal konnte im Prinzip Information drahtlos übermittelt werden. Damit waren (für kurze Zeit) die letzten Zweifel an der Richtigkeit der neuen Theorie ausgeräumt.

2 Elektromagnetische (ebene) Wellen

Die Maxwell-Gleichungen vereinfachen sich, wenn wir von einem ladungsfreien Raum ausgehen. Dann verschwinden die Ladungsdichte ϱ und die Stromdichte $\vec{j}$ und wir erhalten:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{1}$$

Die triviale Lösung wäre nun $\vec{E} = 0$ und $\vec{B} = 0$ für alle Orte $\vec{r}$ und Zeitpunkte t. Das hiesse, es wären gar keine Felder vorhanden. Es lässt sich aber zeigen, dass es auch nicht-triviale Lösungen dieser Gleichungen gibt. Diese stehen dann für elektrische und magnetische Felder, die von alleine – also ohne Präsenz von Ladungen und Strömen – existieren können.

Durch Kombination von dritter und vierter Gleichung in (1) lässt sich z.B. der magnetische Feldvektor $\vec{B}$ eliminieren und unter Ausnutzung der ersten Gleichung ergibt sich eine neue Gleichung, jetzt nur noch für das elektrische Feld $\vec{E}$ – ohne dass wir das jetzt genau zu verstehen brauchen:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \cdot \vec{\nabla}^2 \vec{E} \tag{2}$$

Unter der zusätzlichen Annahme, dass das elektrische Feld keine x- und keine z-Komponente aufweist und sich ausschliesslich längs der x-Richtung verändern kann, d.h.

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y(x,t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \tag{3}$$

vereinfacht sich Gleichung (2) nochmals zu:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \cdot \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \tag{4}$$

In den Übungen werden wir zeigen, dass die Sinusfunktion

$$E_y(x,t) = E_0 \cdot \sin(kx - \omega t) \tag{5}$$

die Gleichung (4) löst. Das elektrische Feld entspricht somit einer mit der Geschwindigkeit

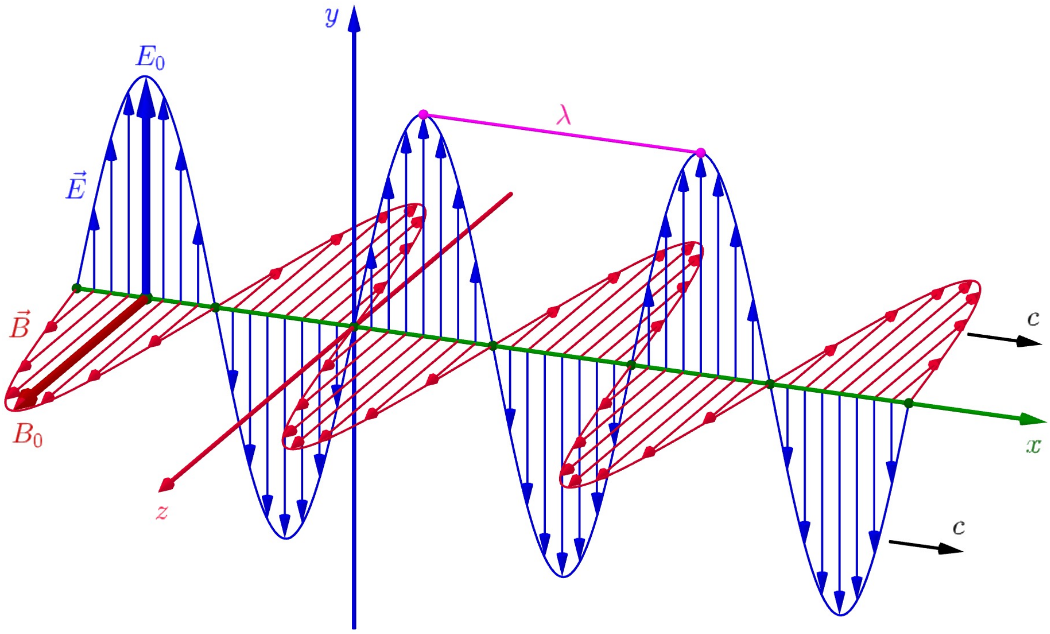
$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \tag{6}$$

voranschreitenden Sinuswelle. Dabei nennt man $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ die **Wellenzahl**, die mit der **Wellenlänge** λ zusammenhängt, und $\omega = 2\pi f$ ist die **Kreisfrequenz**, die mit der **Frequenz** f verbunden ist.

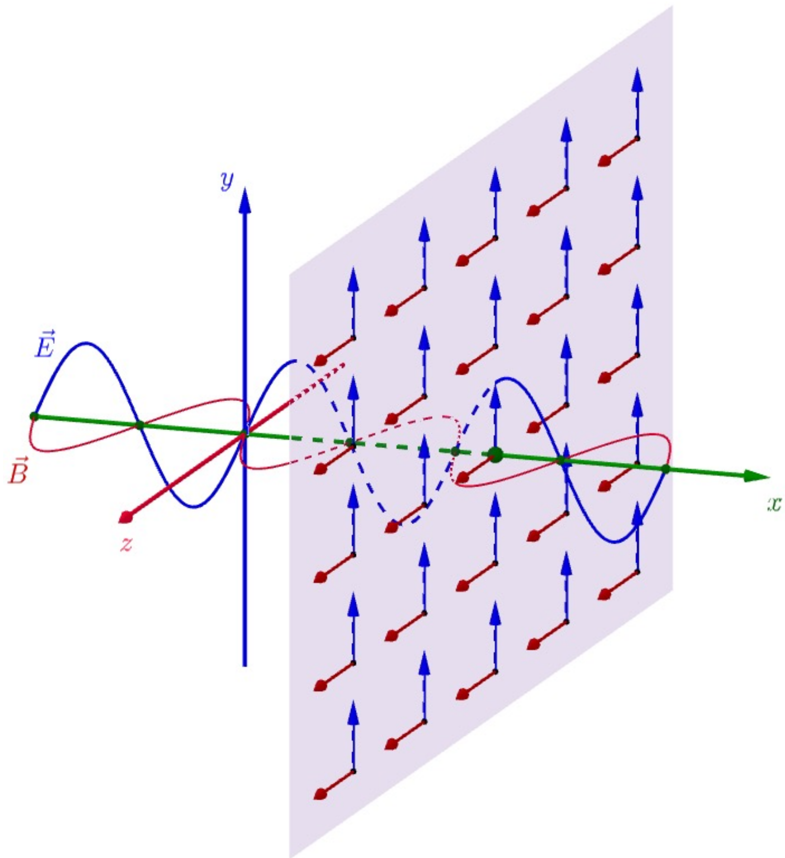
Setzt man diese Lösung für $\vec{E}$ zurück ein, z.B. in die dritte Gleichung von (1), so erhält man für das magnetische Feld $\vec{B}$ ebenfalls eine Sinuswelle. Sie propagiert (= bewegt sich) ebenfalls in x-Richtung, diesmal ist aber nur die Komponente in z-Richtung verschieden von Null:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z(x,t) \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad B_z(x,t) = B_0 \cdot \sin(kx - \omega t) \tag{7}$$

Zusammengefasst heisst das: Wir erhalten eine Kombination aus einem elektrischen und einem magnetischen Feld, die mit der durch (6) gegebenen Geschwindigkeit c in x-Richtung propagiert. Die Veränderung der Felder längs der Ausbreitungsrichtung verläuft sinusförmig, wobei $\vec{E}$ und $\vec{B}$ dieselbe Wellenlänge λ haben. Beide Felder stehen überall senkrecht zur Ausbreitungsrichtung (**Transversalwelle**). Zudem stehen sie auch stets senkrecht zueinander. Wir sprechen von einer **elektromagnetischen Welle** (kurz: **em-Welle**). Die Grafik oben auf der nächsten Seite oben veranschaulicht diese Aussagen.



Achtung! Diese Grafik sieht man überall, wenn von einer elektromagnetischen Welle die Rede ist. Sie ist so aber alles andere als vollständig. Schliesslich wird nur eine endliche Anzahl von Feldvektoren $\vec{E}$ und $\vec{B}$ gezeichnet, wo aber eigentlich zu jedem einzelnen mathematischen Punkt ein solches Feldvektorenpaar gehören würde. Ausserdem werden hier nur Vektoren gezeichnet, die von Orten auf der x-Achse ausgehen. An Orten neben dieser Achse existieren diese Felder aber genau gleich! Das bedeutet, zu jedem Wert x gehört eine ganze – im Prinzip unendlich ausgedehnte – Ebene lauter identischer Feldvektoren. Man spricht deshalb auch von einer **ebenen Welle**. Hier ein Versuch, dies für eine solche Ebene darzustellen:



Ausserdem ist diese Welle auch in beide Richtungen der x-Achse unendlich ausgedehnt. Eine einzelne Lösung füllt also den gesamten dreidimensionalen Raum.

3 Reale elektromagnetische Wellen

Elektromagnetische Wellen können mit der Geschwindigkeit c im Raum propagieren. Das sagt die Theorie. Gibt es ein reales Phänomen, das diesen Wellen entspricht? Die Antwort auf diese Frage war 1865 die grosse Überraschung resp. die unglaubliche Perspektive, die sich plötzlich eröffnete.

Die beiden Konstanten μ_0 und ε_0 liessen sich bereits früher aus verschiedenen elektromagnetischen Versuchen im Labor ermitteln, denn einzelne in den Maxwell-Gleichungen enthaltene Beziehungen waren durchaus und z.T. schon seit Längerem bekannt. Man fand – damals allerdings noch etwas ungenauer und in anderen Einheiten:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} \qquad \text{und} \qquad \varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}$$

Die Maxwell-Gleichungen sagen voraus, dass die Geschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen durch Gleichung (6) gegeben ist. Das wäre folglich:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} \cdot 8.854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}}} = 2.998 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Nun kannte man damals durchaus ein reales Phänomen, das sich wellenförmig und ziemlich genau mit dieser Geschwindigkeit ausbreitet: Licht! War es möglich, dass die neue Theorie der Elektrodynamik wie aus dem Zauberhut plötzlich die Erklärung für das Wesen von Licht geliefert hatte? War Licht ein elektromagnetisches Phänomen?

Die Evidenz dafür verdichtete sich zunehmends und mit den Experimenten Heinrich Hertz' im Jahre 1886 schien die Sache geklärt. Was für ein Fortschritt und Hochgefühl das gewesen sein muss. Wir verstehen Licht! Es besteht aus transversalen elektromagnetischen Wellen, die wir selber auch gezielt erzeugen und detektieren können.

Anmerkung: Es sei angefügt, dass wir mit unseren ebenen Wellen nur die einfachsten Lösungen der Maxwell-Gleichungen (1) betrachtet haben. Es gibt durchaus noch weitere Lösungen. Allen diesen Lösungen ist aber gemein, dass sich die Wellen mit der durch (6) gegebenen Geschwindigkeit ausbreitet. Ausserdem reichen die ebenen Wellen bereits zur Erklärung vieler Phänomene, denn lokal können auch kompliziertere Wellen meistens gut durch ebene Wellen (mit verschiedenen Wellenlängen, Ausbreitungs- und Schwingungsrichtungen) repräsentiert werden.

4 Die Probleme mit den neuen elektromagnetischen Wellen

Trotz der überzeugenden Erfolge der Maxwell'schen Theorie stellte sich bereits kurz nach 1865 heraus, dass diese elektromagnetischen Wellen nicht alle Phänomene des Lichts befriedigend zu beschreiben vermochten. Tatsächlich wurde das neu gewonnene Verständnis des Lichts aufgrund bestimmter Versuche (Messung der Schwarzkörperstrahlung und Photoeffekt) schon bald wieder arg in Frage gestellt. Und noch schlimmer: Schon früh zeigte sich, dass die Maxwell'schen Gleichungen einen logischen Widerspruch zur Newton'schen Mechanik enthalten. Es konnten nicht beide Theorien gleichzeitig ganz richtig sein.

Zur Lösung beider Problematiken bedurfte es zahlreicher Wissenschafter, die sich tief mit dieser anspruchsvollen Materie auseinandersetzten, sowohl experimentell, als auch theoretisch.

Dabei ist vor allem der Theoretiker **Albert Einstein** (1879 – 1955) zu nennen, der das physikalische Verständnis dank seiner Arbeiten im Jahre 1905 in mehreren Bereichen um entscheidende Schritte weiter brachte. So zeigte er einerseits, dass nicht die neue elektromagnetische Theorie Maxwells, sondern die alte mechanische Theorie Newtons Mängel aufwies und im Bereich grosser Geschwindigkeiten durch die **Relativitätstheorie** – eine neue Theorie von Raum und Zeit – zu ersetzen ist. Andererseits konnte er im Rahmen seiner Erklärung des sogenannten **photoelektrischen Effekts** (kurz: **Photoeffekt**) überzeugend darlegen, dass Licht aus einzelnen Teilchen, also aus einzelnen Energiepaketchen bestehen muss, was dem Wellenbild zunächst einmal diametral zu widersprechen schien. Damit trug er massgeblich zur Entwicklung der Quantenphysik in den darauf folgenden Jahren und Jahrzehnten bei.

5 Gut zu wissen: Eigenschaften elektromagnetischer Wellen

- Licht wird gemäss der klassischen Elektrodynamik als elektromagnetische Welle beschrieben. Im einfachsten Fall (der aber bereits alles Wesentliche enthält) notieren wir für das elektrische und das magnetische Feld je eine in x-Richtung laufende Sinusfunktion gemäss (4) und (7):

  $$E_y(x,t) = E_0 \cdot \sin(kx - \omega t) \qquad \text{und} \qquad B_z(x,t) = B_0 \cdot \sin(kx - \omega t)$$

  Dabei stehen die beiden Felder stets senkrecht zueinander und sind offensichtlich zu jedem Zeitpunkt t und an jedem Ort x proportional zueinander.

- Die Maxwell-Gleichungen enthalten keine Einschränkungen bezüglich der Frequenzen f resp. Wellenlängen λ. Sie geben lediglich vor, dass die Wellen mit der Geschwindigkeit $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ propagieren. Im Prinzip sind somit beliebige Frequenzen resp. Wellenlängen erlaubt. Es eröffnet sich das **Spektrum elektromagnetischer Strahlungen** (vgl. Grafik nächste Seite).

  Wir geben den diversen Wellenlängenbereichen aufgrund ihres Vorkommens, ihrer Eigenschaften oder ihrer Anwendungsbereiche verschiedene Namen. So gibt es beispielsweise **Radiowellen** (Rundfunk), **Mikrowellen**, die **Höhenstrahlung**, das **optische Fenster** mit dem für uns sichtbaren Licht und gleich daneben die **Infrarot**- und die **Ultraviolettstrahlung**.

  Wenn wir in der Physik von **Licht** sprechen, meinen wir in aller Regel alle Arten elektromagnetischer Strahlung. Wir schränken uns also nicht auf das sichtbare Licht ein. Warum auch? Physikalisch gesehen handelt es sich ja stets um ein- und dasselbe Phänomen, nämlich um elektromagnetische Wellen. Ob und wie diese Wellen mit Materie interagieren, hängt allerdings sehr stark von ihrer Frequenz resp. ihrer Wellenlänge ab.

- Wie wir im Thema Schwingungen und Wellen bereits gelernt hatten, gibt es bei allen Wellenphänomenen den immer gleichen Zusammenhang zwischen der Frequenz f, der Wellenlänge λ und der Ausbreitungsgeschwindigkeit c, den wir **Wellenbeziehung** nennen wollen:

  $$c = \lambda \cdot f \tag{8}$$

  Da die Geschwindigkeit c gegeben ist, gehört zu jeder Frequenz f genau eine Wellenlänge λ.[1]

- Selbstverständlich können die y- und die z-Richtung der em-Wellen im Prinzip frei gewählt werden, solange sie senkrecht zueinander und zur x-Achse stehen. So gibt es für das elektrische Feld unendlich viele Schwingungsebenen (gegeben durch die x-Richtung und eine der unendlich vielen y-Richtungen). Wir sprechen von verschiedenen **Polarisationsrichtungen**. Auf diese **Polarisation** der em-Wellen wollen wir aber jetzt gerade nicht weiter eingehen.

- Zuletzt nehmen wir zur Kenntnis, dass aus den Maxwell-Gleichungen auch folgt, wie viel **Strahlungsenergie** E_S resp. **Strahlungsleistung** P_S so eine em-Welle beinhaltet oder transportiert. Sie ist proportional zum Quadrat der Feldamplitude, wobei man aufgrund der Proportionalität zwischen $E_y(x,t)$ und $B_z(x,t)$ nur eine der beiden Amplituden benötigt, z.B. E_0:

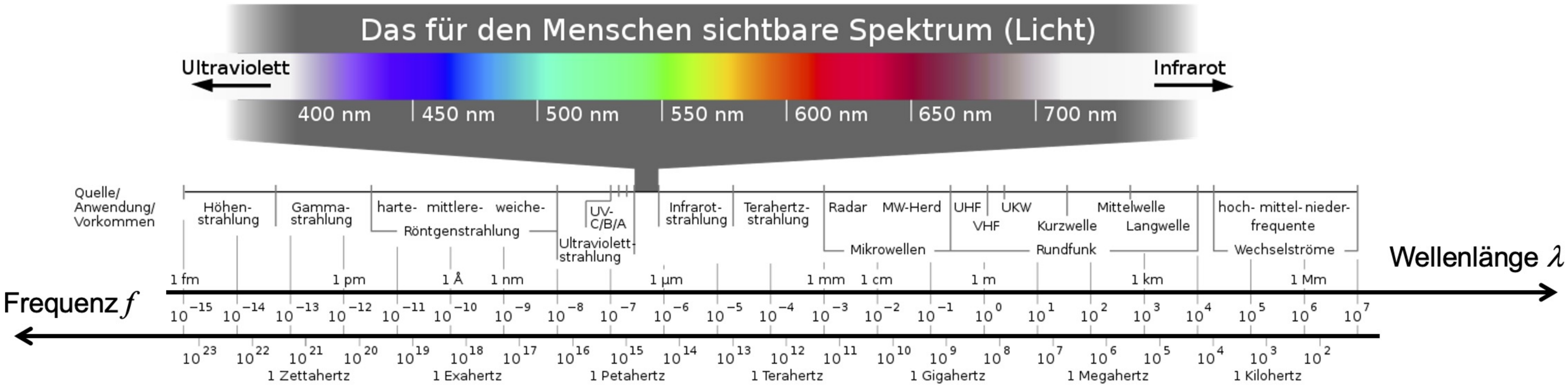
  $$E_\text{S} \sim E_0^2 \qquad \text{resp.} \qquad P_\text{S} \sim E_0^2 \tag{9}$$

  Wir bemerken, dass diese Energie nicht von der Wellenlänge (oder Frequenz) abhängt. Anschaulich kann man in unseren Veranschaulichungen der em-Wellen auf Seite 3 einfach die Wellenamplitude vergrössern oder verkleinern, um die Energie der Welle zu verändern. Welche Wellenlänge λ die Welle dabei aufweist, ist irrelevant.

  Das wollen wir so mitnehmen, denn genau in diesem Punkt musste die Quantenphysik die klassische Elektrodynamik revidieren und nochmals ein völlig neues Verständnis zum Wesen von Licht entwerfen!

[1] Allerdings ist die Lichtgeschwindigkeit vom Medium abhängig, durch das sich das Licht fortbewegt. Das ist verständlich, denn so ein Medium enthält elektrische Ladungen, sodass die Maxwell-Gleichungen nicht mehr die ladungsfreie Form (1) aufweisen. Wir müssten korrekterweise also sagen: "**Im Vakuum** gehört zu jeder Frequenz genau eine bestimmte Wellenlänge." Allerdings ist unsere Luft elektromagnetisch gesehen fast ein Vakuum, und so spielt die Präzisierung für unsere Anwendungen keine Rolle.

Das elektromagnetische Spektrum



Wellenbeziehung $\boxed{c = \lambda \cdot f}$

c = Lichtgeschwindigkeit (299‘792‘458 m/s)

λ = Wellenlänge (m)

f = Frequenz (Hz = 1/s)