Übungen zur Quantenphysik – Lösungen Serie 1

1. *Das mathematische Verständnis der elektromagnetischen Wellen – Teil I*

   (a) Die Bedeutungen der vier Parameter sind:

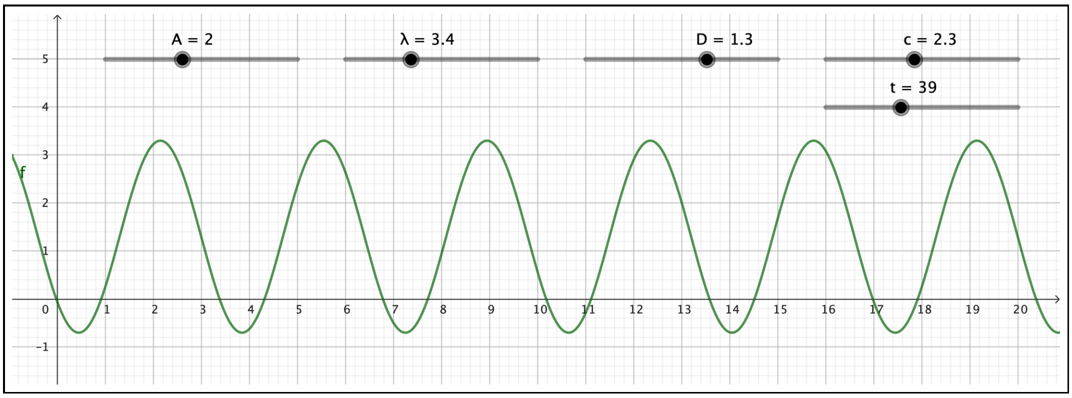
   $\boldsymbol{A}$ = **Vertikale Streckung:** Der Parameter A gibt die vertikale Distanz zwischen der Mittellinie und einem Punkt des höchsten Ausschlags vor. Wir sprechen von der **Ausschlagsstärke** oder der **Amplitude**.

   $\boldsymbol{\lambda}$ = **Horizontale Streckung:** Ohne physikalischen Bezug (also in der Mathematik) wird der Parameter λ als **Periode** bezeichnet. Er steht für die horizontale Länge des sich wiederholenden Auf-Ab-Musters – z.B. von einem Wellenberg bis zum nächsten. In unserem Kontext wird λ die **Wellenlänge** sein, also eine echte Strecke.
   Die unmodifizierte Sinusfunktion hat die Periode resp. Wellenlänge 2π, weil sie y-Koordinate eines Punktes auf dem Einheitskreis definiert wird, den wir in Abhängigkeit des Zentriwinkels, der im Bogenmass angegeben wird, auf dem Einheitskreis herumläuft.

   $\boldsymbol{C}$ = **Horizontale Verschiebung:** Der Parameter C lässt uns die Sinusfunktion horizontal verschieben. Dabei steht $C > 0$ für eine **Rechtsverschiebung**, wenn wir ein Minuszeichen in die Funktion einbauen, also eben $x - C$ notieren.

   $\boldsymbol{D}$ = **Vertikale Verschiebung:** Mit dem Parameter D regeln wir die vertikale Mittellage der Welle.

   (b) Hier das Aussehen eines möglichen GeoGebra-Files:



   (c) Wir multiplizieren im Argument der Sinusfunktion aus und erhalten:

$$f(x,t) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\,(x - ct)\right) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\,x - \frac{2\pi c}{\lambda}\,t\right)$$

   Damit muss $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ und $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = kc$ sein. Ganz direkt folgt nun:

$$\omega = kc \quad \Rightarrow \quad c = \frac{\omega}{k}$$

   (d) Die Wellenbeziehung $c = \lambda \cdot f$ entsteht ganz automatisch, wenn wir uns überlegen, wie Wellen erzeugt werden. Aufgrund einer Anregungsfrequenz f werden Wellen ausgesendet. Pro Periode $T = \frac{1}{f}$ löst sich genau eine Wellenlänge λ vom Ort der Anregung ab. Beträgt die Wellengeschwindigkeit c, so folgt damit sofort:

$$\lambda = c \cdot T = \frac{c}{f} \quad \Rightarrow \quad c = \lambda \cdot f$$

   Nebenbei: f ist in der Folge nicht nur die Anregungsfrequenz, sondern natürlich ebenso die Frequenz, mit der Wellenberge oder Wellentäler an einer fixen Stelle x vorbeikommen, wenn die Welle unterwegs ist.

2. *Der kleinstmögliche Körper*

Mit den Definitionen für Addition und Multiplikation gehen wir ein Körperaxiom nach dem andern durch:

i. Assoziativität der Addition: Es gibt acht mögliche Fälle, denn $a, b, c \in \mathbb{K}$ können je entweder 0 oder 1 sein:

$$
\begin{array}{lcl}
0+(0+0)=0+0=0 & \text{ist dasselbe wie} & (0+0)+0=0+0=0 \\
0+(0+1)=0+1=1 & \text{ist dasselbe wie} & (0+0)+1=0+1=1 \\
0+(1+0)=0+1=1 & \text{ist dasselbe wie} & (0+1)+0=1+0=1 \\
0+(1+1)=0+0=0 & \text{ist dasselbe wie} & (0+1)+1=1+1=0 \\
1+(0+0)=1+0=1 & \text{ist dasselbe wie} & (1+0)+0=1+0=1 \\
1+(0+1)=1+1=0 & \text{ist dasselbe wie} & (1+0)+1=1+1=0 \\
1+(1+0)=1+1=0 & \text{ist dasselbe wie} & (1+1)+0=0+0=0 \\
1+(1+1)=1+0=1 & \text{ist dasselbe wie} & (1+1)+1=0+1=1
\end{array}
$$

ii. Kommutativität der Addition: Dies ist trivial, denn die Addition wird direkt sichtbar kommutativ definiert ($a + b = b + a$ gilt für jede Wahl von a und b).

iii. Nullelement: Offensichtlich ist dies die Zahl 0, denn $0 + 0 = 0$ und $1 + 0 = 1$.

iv. Negatives Element: Ja, zu jedem Element a des Körpers gibt es ein negatives Element $(-a)$, das zu a addiert das Nullelement 0 ergibt. Das negative Element (-0) zum Element 0 ist 0 selber, denn $0 + 0 = 0$. Das negative Element (-1) zum Element 1 ist 1 selber, denn $1 + 1 = 0$.

Beachte: Niemand hat gefordert, dass das negative Element $(-a)$ zu einem Element a nicht das Element a selber sein kann. Kein Körperaxiom widerspricht dieser Möglichkeit.

v. Assoziativität der Multiplikation: Auch hier gibt es acht mögliche Fälle, die im Prinzip alle überprüft werden müssen:

$$
\begin{array}{lcl}
0\cdot(0\cdot 0)=0\cdot 0=0 & \text{ist dasselbe wie} & (0\cdot 0)\cdot 0=0\cdot 0=0 \\
0\cdot(0\cdot 1)=0\cdot 0=0 & \text{ist dasselbe wie} & (0\cdot 0)\cdot 1=0\cdot 1=0 \\
0\cdot(1\cdot 0)=0\cdot 0=0 & \text{ist dasselbe wie} & (0\cdot 1)\cdot 0=0\cdot 0=0 \\
0\cdot(1\cdot 1)=0\cdot 1=0 & \text{ist dasselbe wie} & (0\cdot 1)\cdot 1=0\cdot 1=0 \\
1\cdot(0\cdot 0)=1\cdot 0=0 & \text{ist dasselbe wie} & (1\cdot 0)\cdot 0=0\cdot 0=0 \\
1\cdot(0\cdot 1)=1\cdot 0=0 & \text{ist dasselbe wie} & (1\cdot 0)\cdot 1=0\cdot 1=0 \\
1\cdot(1\cdot 0)=1\cdot 0=0 & \text{ist dasselbe wie} & (1\cdot 1)\cdot 0=1\cdot 0=0 \\
1\cdot(1\cdot 1)=1\cdot 1=1 & \text{ist dasselbe wie} & (1\cdot 1)\cdot 1=0\cdot 1=1
\end{array}
$$

vi. Kommutativität der Multiplikation: Auch die Multiplikation ist direkt sichtbar für alle möglichen Fälle kommutativ definiert.

vii. Einselement: Die Zahl 1 ist das Einselement, denn $0 \cdot 1 = 0$ und $1 \cdot 1$.

viii. Inverses Element: Das inverse Element 1^{-1} zum Element 1 ist 1 selber, denn $1 \cdot 1 = 1$.

N.B.: Zum Nullelement 0 muss es kein Inverses geben! Das ist bestens, denn genau dies würde nicht klappen. Eine Zahl multipliziert mit 0 ist immer 0.

ix. Distributivität: Dies prüfen wir ebenfalls, indem wir alle acht möglichen Fälle einen nach dem andern durchgehen:

$$\begin{array}{lcl}
0 \cdot (0+0) = 0 \cdot 0 = 0 & \text{ist dasselbe wie} & (0 \cdot 0) + (0 \cdot 0) = 0 + 0 = 0 \\
0 \cdot (0+1) = 0 \cdot 1 = 0 & \text{ist dasselbe wie} & (0 \cdot 0) + (0 \cdot 1) = 0 + 0 = 0 \\
0 \cdot (1+0) = 0 \cdot 1 = 0 & \text{ist dasselbe wie} & (0 \cdot 1) + (0 \cdot 0) = 0 + 0 = 0 \\
0 \cdot (1+1) = 0 \cdot 0 = 0 & \text{ist dasselbe wie} & (0 \cdot 1) + (0 \cdot 1) = 0 + 1 = 0 \\
1 \cdot (0+0) = 1 \cdot 0 = 0 & \text{ist dasselbe wie} & (1 \cdot 0) + (1 \cdot 0) = 0 + 0 = 0 \\
1 \cdot (0+1) = 1 \cdot 1 = 1 & \text{ist dasselbe wie} & (1 \cdot 0) + (1 \cdot 1) = 0 + 1 = 1 \\
1 \cdot (1+0) = 1 \cdot 1 = 1 & \text{ist dasselbe wie} & (1 \cdot 1) + (1 \cdot 0) = 1 + 0 = 1 \\
1 \cdot (1+1) = 1 \cdot 0 = 0 & \text{ist dasselbe wie} & (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1) = 1 + 1 = 0
\end{array}$$

Tatsächlich haben wir nun alle Körperaxiome verifiziert. Die Menge $\{0, 1\}$ zusammen mit der in der Aufgabenstellung deklarierten Addition und Multiplikation bildet demnach tatsächlich einen **Körper**, und zwar den kleinst möglichen!

3. *Elementares Rechnen mit komplexen Zahlen*

Mit $z_1 = 3 - 4\mathrm{i}$, $z_2 = 2 + \mathrm{i}$ und $z_3 = 8\mathrm{i}$ ergeben die sechs Rechnungen:

i. $z_1 - 4z_2 + z_3 = 3 - 4\mathrm{i} - 4(2+) + 8\mathrm{i} = 3 - 4\mathrm{i} - 8 - 4\mathrm{i} + 8\mathrm{i} = -5 + 0\mathrm{i} = -5$

ii. $$\begin{aligned} 2z_2 - (8z_2 + \mathrm{i}z_3) &= 2(2+\mathrm{i}) - \big(8(2+\mathrm{i}) + \mathrm{i}(8\mathrm{i})\big) = 4 + 2\mathrm{i} - (16 + 8\mathrm{i} + 8\mathrm{i}^2) = \\ &= 4 + 2\mathrm{i} - (16 + 8\mathrm{i} - 8) = 4 + 2\mathrm{i} - 16 - 8\mathrm{i} + 8 = -4 - 6\mathrm{i} \end{aligned}$$

iii. $$\begin{aligned} z_1 z_2 z_3 &= (3 - 4\mathrm{i})(2 + \mathrm{i}) \cdot 8\mathrm{i} = (6 + 3\mathrm{i} - 8\mathrm{i} - 4\mathrm{i}^2) \cdot 8\mathrm{i} = (6 + 3\mathrm{i} - 8\mathrm{i} + 4) \cdot 8\mathrm{i} \\ &= (10 - 5\mathrm{i}) \cdot 8\mathrm{i} = 80\mathrm{i} - 40\mathrm{i}^2 = 40 + 80\mathrm{i} \end{aligned}$$

iv. $$\begin{aligned} z_1^2 + z_2^2 &= (3 - 4\mathrm{i})^2 + (2 + \mathrm{i})^2 = 9 - 24\mathrm{i} + 16\mathrm{i}^2 + 4 + 4\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 \\ &= 9 - 24\mathrm{i} - 16 + 4 + 4\mathrm{i} - 1 = -4 - 20\mathrm{i} \end{aligned}$$

v. $\mathrm{Re}(z_1 + z_3) = \mathrm{Re}(3 - 4\mathrm{i} + 8\mathrm{i}) = \mathrm{Re}(3 + 4\mathrm{i}) = 3$

vi. $\mathrm{Im}(z_2 z_3) = \mathrm{Im}\big((2 + \mathrm{i}) \cdot 8\mathrm{i}\big) = \mathrm{Im}\big(16\mathrm{i} + 8\mathrm{i}^2\big) = \mathrm{Im}(16\mathrm{i} - 8) = 16$