Übungen zur Quantenphysik – Lösungen Serie 10

1. *Training der partiellen Integration*

   Für die Integrale finden wir:

   (a)
$$\int_1^e x^2 \ln x \,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln x\,\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^3}{3} - 0 - \frac{1}{3}\cdot\int_1^e x^2\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3+1}{9}$$

   (b)
$$\int_0^1 x^2 e^x\,\mathrm{d}x = x^2 e^x\,\Big|_0^1 - \int_0^1 2x\,e^x\,\mathrm{d}x = e - 0 - 2\left(x\,e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x\right)$$
$$= e - 2\left(e - 0 - (e^x)\Big|_0^1\right) = e - 2\big(e - e + 1\big) = e - 2$$

   (c)
$$\int_0^{+\infty} x\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{-\infty} -y\,e^y\,(-\mathrm{d}y) = \int_0^{-\infty} y\,e^y\,\mathrm{d}y = y\,e^y\,\Big|_0^{-\infty} - \int_0^{-\infty} e^y\,\mathrm{d}y$$
$$= 0 - 0 - e^y\,\Big|_0^{-\infty} = -(0-1) = 1$$

   (d)
$$\int_0^{+\infty} x\,e^{-\mu x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mu}\cdot\int_0^{+\infty}\frac{y}{\mu}\,e^{-y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\mu^2}\cdot\int_0^{+\infty} y\,e^{-y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\mu^2}$$

   (e)
$$\int_0^{+\infty} x^2\,e^{-\mu x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\mu}\cdot\int_0^{-\infty}\frac{y^2}{\mu^2}\,e^y\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{\mu^3}\cdot\int_0^{-\infty} y^2 e^y\,\mathrm{d}y$$
$$= -\frac{1}{\mu^3}\cdot\left(y^2 e^y\,\Big|_0^{-\infty} - \int_0^{-\infty} 2y\,e^y\,\mathrm{d}y\right) = -\frac{1}{\mu^3}\,(0-0-2) = \frac{2}{\mu^3}$$

   (f)
$$\int_0^{\pi/2}\sin x\,\cos x\,\mathrm{d}x = \sin x\,\sin x\,\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\cos x\,\sin x\,\mathrm{d}x = 1 - 0 - \int_0^{\pi/2}\cos x\,\sin x\,\mathrm{d}x$$
$$\Rightarrow\quad 2\cdot\int_0^{\pi/2}\sin x\,\cos x\,\mathrm{d}x = 1 \quad\Rightarrow\quad \int_0^{\pi/2}\sin x\,\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

2. *Plausibilisierungen rund um den Beweis der Normierungserhaltung*

   (a) Wir berechnen die beiden Ausdrücke ganz strikt nach vorgegebener Reihenfolge:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_1^{+\infty} A\cdot\frac{t^2}{x^2}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(At^2\cdot\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(At^2\cdot\left[-\frac{1}{x}\right]\Big|_1^{+\infty}\right)$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(At^2\cdot(0+1)\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(At^2\big) = 2At$$
$$\int_1^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t}\left(A\cdot\frac{t^2}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty}\frac{2At}{x^2}\,\mathrm{d}x = 2At\cdot\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= 2At\cdot\left[-\frac{1}{x}\right]\Big|_1^{+\infty} = 2At\cdot(0+1) = 2At$$

   Es kommt tatsächlich dasselbe Resultat heraus. Wir verstehen auch ein bisschen besser weshalb: Die örtliche Integration ($\mathrm{d}x$) und die Ableitung nach der Zeit ($\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$) kommen sich quasi überhaupt nicht in die Quere. Sie stören sich gegenseitig nicht.

(b) Sind $z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}$, $z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i}$ und $z_3 = x_3 + y_3\mathrm{i}$, so können wir schreiben:

$$z_1 = \mathrm{i}z_2 - \mathrm{i}z_3 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + y_1\mathrm{i} = \mathrm{i}\cdot(x_2 + y_2\mathrm{i}) - \mathrm{i}\cdot(x_3 + y_3\mathrm{i})$$

Daraus folgt durch Ausmultiplizieren rechts und mit $\mathrm{i}^2 = -1$:

$$x_1 + y_1\mathrm{i} = \mathrm{i}\cdot(x_2 + y_2\mathrm{i}) - \mathrm{i}\cdot(x_3 + y_3\mathrm{i}) = x_2\mathrm{i} - y_2 - x_3\mathrm{i} + y_3 = y_3 - y_2 + (x_2 - x_3)\mathrm{i}$$

Da der Real- und der Imaginärteil von z_1 eindeutig sind, identifizieren wir:

$$x_1 = y_3 - y_2 \qquad \text{und} \qquad y_1 = x_2 - x_3$$

Unter Verwendung dieser Gleichungen können wir zeigen, dass auch die komplex-konjugierte Gleichung korrekt ist:

$$\begin{aligned}
-\mathrm{i}z_2^* + \mathrm{i}z_3^* &= -\mathrm{i}\cdot(x_2 + y_2\mathrm{i})^* + \mathrm{i}\cdot(x_3 + y_3\mathrm{i})^* \\
&= -\mathrm{i}\cdot(x_2 - y_2\mathrm{i}) + \mathrm{i}\cdot(x_3 - y_3\mathrm{i}) \\
&= -x_2\mathrm{i} - y_2 + x_3\mathrm{i} + y_3 \\
&= y_3 - y_2 + (x_3 - x_2)\mathrm{i} = x_1 - y_1\mathrm{i} = z_1^*
\end{aligned}$$

Die Gleichung stimmt also und wir verstehen besser, wie sich eine Gleichung mit komplexen Zahlen in ihr konjugiert-komplexes Gegenstück verwandeln lässt. Im Prinzip muss man einfach von allen Gliedern das konjugiert-Komplexe notieren.

3. *Eine erste komplexwertige Wellenfunktion*

(a) Die komplette Normierungsrechnung sieht folgendermassen aus:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t)\;\Psi(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} A\,e^{-\lambda|x|}\,e^{\mathrm{i}\omega t}\cdot A\,e^{-\lambda|x|}\,e^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}x \\
&= A^2\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda|x|-\lambda|x|}\cdot e^{\mathrm{i}\omega t-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}x = A^2\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\lambda|x|}\,\mathrm{d}x \\
&= 2A^2\cdot\int_0^{+\infty} e^{-2\lambda x}\,\mathrm{d}x = -\frac{2A^2}{2\lambda}\cdot e^{-2\lambda x}\Big|_0^{+\infty} = -\frac{A^2}{\lambda}\cdot(0-1) \\
&= \frac{A^2}{\lambda} \overset{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{\lambda} \quad \text{resp.} \quad \Psi(x,t) = \sqrt{\lambda}\,e^{-\lambda|x|}\,e^{-\mathrm{i}\omega t}
\end{aligned}$$

(b) Für den Erwartungswert $\langle x\rangle$ berechnen wir:

$$\begin{aligned}
\langle x\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot|\Psi(x,t)|^2\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\Psi^*(x,t)\;\Psi(x,t)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\sqrt{\lambda}\,e^{-\lambda|x|}\,e^{\mathrm{i}\omega t}\cdot\sqrt{\lambda}\,e^{-\lambda|x|}\,e^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}x = \lambda\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} x\,e^{-2\lambda|x|}\,\mathrm{d}x = 0
\end{aligned}$$

x ist eine ungerade und $e^{-2\lambda|x|}$ eine gerade Funktion. Insgesamt wird über die ungerade Funktion $x\,e^{-2\lambda|x|}$ integriert, was bei symmetrischen Integrationsgrenzen 0 ergibt.

Für den Erwartungswert der Ortsquadrate $\langle x^2\rangle$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\langle x^2\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot|\Psi(x,t)|^2\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot\Psi^*(x,t)\;\Psi(x,t)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot\sqrt{\lambda}\,e^{-\lambda|x|}\,e^{\mathrm{i}\omega t}\cdot\sqrt{\lambda}\,e^{-\lambda|x|}\,e^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}x = \lambda\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-2\lambda|x|}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\lambda\cdot\int_0^{+\infty} x^2e^{-2\lambda x}\,\mathrm{d}x \overset{*}{=} 2\lambda\cdot\frac{1}{4\lambda^3} = \frac{1}{2\lambda^2}
\end{aligned}$$

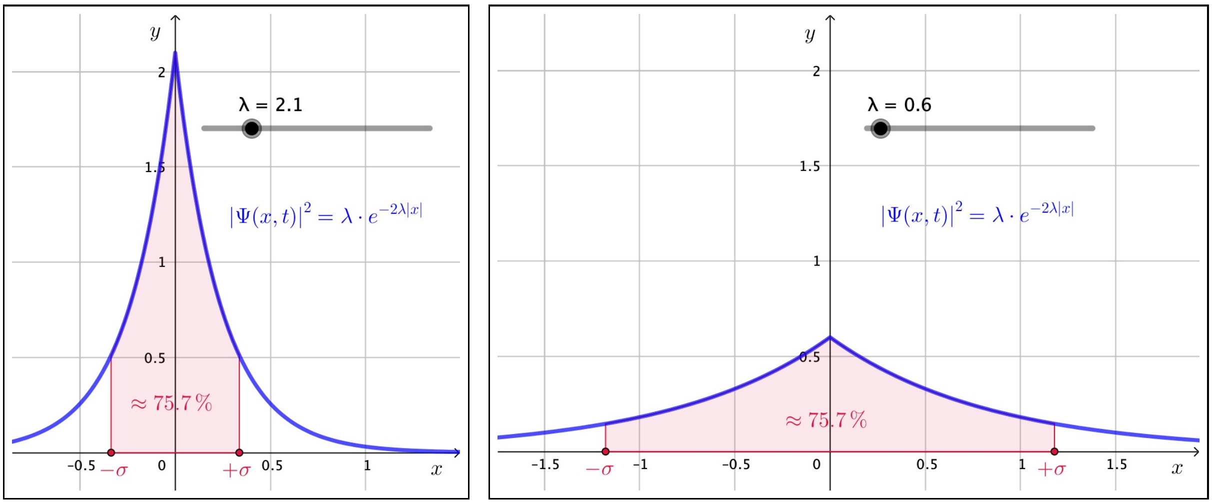
$*$ Hier benutze ich das Resultat für das Integral aus Aufgabe 1.(e) mit $\mu = 2\lambda$:

$$\int_0^{+\infty} x^2e^{-2\lambda x}\,\mathrm{d}x \overset{2\lambda=\mu}{=} \int_0^{+\infty} x^2e^{-\mu x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\mu^3} \overset{\mu=2\lambda}{=} \frac{2}{(2\lambda)^3} = \frac{2}{8\lambda^3} = \frac{1}{4\lambda^3}$$

(c) Für die Standardabweichung von x erhalten wir:

$$\sigma = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\frac{1}{2\lambda^2} - 0} = \frac{1}{\lambda\sqrt{2}}$$

Hier zwei Beispiele für verschiedene Werte von λ – die Verteilung ist unterschiedlich "verschmiert":



Egal, wie groß der Wert von λ tatsächlich ist, das Teilchen befindet sich mit einer Wahrscheinlichkeit von 75.7 % im Intervall $[-\sigma; +\sigma]$, wie die folgende Rechnung zeigt ($\sigma = \frac{1}{\lambda\sqrt{2}}$):

$$\begin{aligned}
\int_{-\sigma}^{+\sigma} |\Psi(x,t)|^2 \,\mathrm{d}x &= \int_{-\sigma}^{+\sigma} \Psi^*(x,t)\, \Psi(x,t) \,\mathrm{d}x = \lambda \cdot \int_{-\sigma}^{+\sigma} \sqrt{\lambda}\, e^{-\lambda|x|}\, e^{\mathrm{i}\omega t} \cdot \sqrt{\lambda}\, e^{-\lambda|x|}\, e^{-\mathrm{i}\omega t} \,\mathrm{d}x \\
&= \lambda \cdot \int_{-\sigma}^{+\sigma} e^{-2\lambda|x|} \,\mathrm{d}x = 2\lambda \cdot \int_0^{+\sigma} e^{-2\lambda x} \,\mathrm{d}x = 2\lambda \cdot \frac{-1}{2\lambda} \cdot e^{-2\lambda x} \Big|_0^{+\sigma} \\
&= -\left(e^{-2\lambda\sigma} - e^0\right) = 1 - e^{-2\lambda\sigma} = 1 - e^{-2\lambda \cdot \frac{1}{\lambda\sqrt{2}}} = 1 - e^{-\sqrt{2}} \approx 0.757 = 75.7\,\%
\end{aligned}$$

Aussage: Das Teilchen stets mit einer Wahrscheinlichkeit von 24.3 % außerhalb von $[-\sigma; +\sigma]$ zu finden.

4. **Zusatzaufgabe:** *Eine erste, rein reellwertige Wellenfunktion*

(a) Ich normiere die Wellenfunktion zuerst ohne Einsatz einer linearen Substitution:

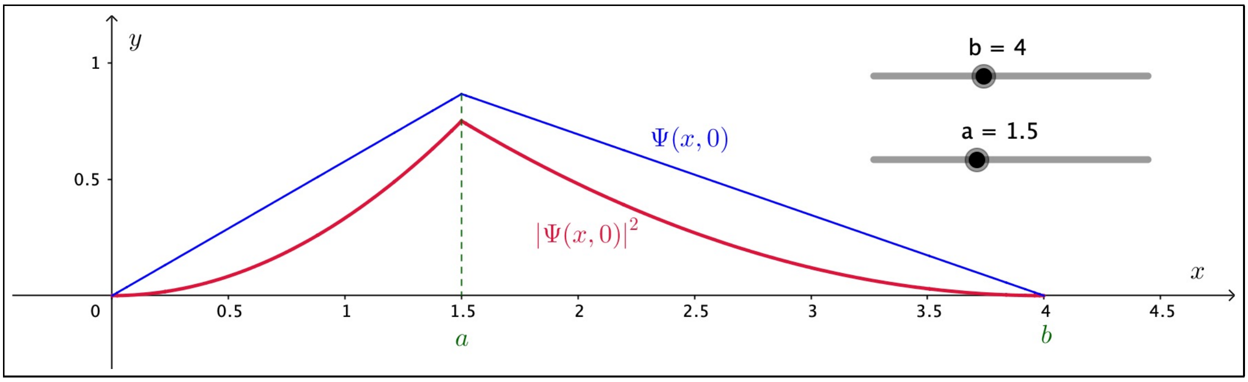
$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,0)|^2 \,\mathrm{d}x &= \int_0^a \frac{A^2 x^2}{a^2} \,\mathrm{d}x + \int_a^b \frac{A^2 (b-x)^2}{(b-a)^2} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{A^2}{a^2} \cdot \int_0^a x^2 \,\mathrm{d}x + \frac{A^2}{(b-a)^2} \cdot \int_a^b \left(b^2 - 2bx + x^2\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{A^2}{a^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^a + \frac{A^2}{(b-a)^2} \cdot \left[b^2 x - bx^2 + \frac{x^3}{3}\right] \Big|_a^b \\
&= \frac{A^2}{a^2} \cdot \frac{a^3}{3} + \frac{A^2}{(b-a)^2} \cdot \left(b^3 - b^3 + \frac{b^3}{3} - b^2 a + ba^2 - \frac{a^3}{3}\right) \\
&= \frac{A^2 a}{3} + \frac{A^2}{(b-a)^2} \cdot \left(\frac{b^3}{3} - b^2 a + ba^2 - \frac{a^3}{3}\right) \\
&= \frac{A^2 a}{3} + \frac{A^2}{3(b-a)^2} \cdot \left(b^3 - 3b^2 a + 3ba^2 - a^3\right) \\
&= \frac{A^2 a}{3} + \frac{A^2}{3(b-a)^2} \cdot (b-a)^3 = \frac{A^2 a}{3} + \frac{A^2 (b-a)}{3} \\
&= \frac{A^2}{3} \cdot (a + b - a) = \frac{A^2 b}{3} \stackrel{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{3}{b}}
\end{aligned}$$

Wir haben zur Kenntnis genommen, dass das Vorgehen ohne lineare Substitution relativ kompliziert ist. Insbesondere verlangt die Faktorisierung von $\frac{b^3}{3} - b^2a + ba^2 - \frac{a^3}{3}$ ein geschultes Auge.
Wir führen die Normierung gleich nochmals mit der linearen Substitution $s = b - x$ durch:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |\varPsi(x,0)|^2 \,\mathrm{d}x &= \int_0^a \left(\frac{Ax}{a}\right)^2 \mathrm{d}x + \int_a^b \left(\frac{A(b-x)}{b-a}\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{A^2}{a^2} \int_0^a x^2 \,\mathrm{d}x + \frac{A^2}{(b-a)^2} \int_a^b (b-x)^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{A^2}{a^2} \cdot \frac{x^3}{3}\bigg|_0^a - \frac{A^2}{(b-a)^2} \int_{b-a}^0 s^2 \,\mathrm{d}s \\
&= \frac{A^2}{a^2} \cdot \frac{a^3}{3} + \frac{A^2}{(b-a)^2} \int_0^{b-a} s^2 \,\mathrm{d}s \\
&= \frac{A^2 a}{3} + \frac{A^2}{(b-a)^2} \cdot \frac{s^3}{3}\bigg|_0^{b-a} \\
&= \frac{A^2 a}{3} + \frac{A^2}{(b-a)^2} \cdot \frac{(b-a)^3}{3} \\
&= \frac{A^2 a}{3} + \frac{A^2(b-a)}{3} \\
&= \frac{A^2}{3} \cdot (a + b - a) = \frac{A^2 b}{3} \stackrel{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{3}{b}}
\end{aligned}$$

Die lineare Substitution hat zu einer wesentlichen Vereinfachung der algebraischen Zusammenfassung geführt, weil sich beim Einsetzen der Integrationsgrenzen direkt der faktorisierte Ausdruck $(b-a)^3$ ergibt, der sich bestens mit $\frac{1}{(b-a)^2}$ kürzen lässt.

(b) Zuerst definieren wir Schieberegler für a und b. Danach lassen wir uns zusätzlich zu $\varPsi(x,0)$ auch gerade $|\varPsi(x,0)|^2$ aufzeichnen:



(c) Die saloppe, aber ausreichende Antwort lautet: Am wahrscheinlichsten ist das Teilchen bei der Stelle a anzutreffen, denn dort ist die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\varPsi(x,0)|^2$ am grössten.

(d) Die Wahrscheinlichkeit das Teilchen zum Zeitpunkt $t = 0$ links von a anzutreffen, beträgt:

$$\int_0^a |\varPsi(x,0)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{3x^2}{ba^2} \,\mathrm{d}x = \frac{3}{a^2 b} \cdot \int_0^a x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{3}{a^2 b} \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{a}{b}$$

Das passt bestens, denn für $b = a$ ergibt sich $1 = 100\,\%$, was ja so sein muss, wenn a mit dem rechten Rand des überhaupt möglichen Bereiches zusammenfällt. Und wenn a in der Mitte des Intervalls $[0; b]$ sitzt, wenn also $b = 2a$ ist, beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen links von a zu finden ist, eben $\frac{a}{2a} = \frac{1}{2} = 50\,\%$.

(e) Wie angekündigt, gibt die Berechnung des Erwartungswertes von x einiges zu tun:

$$
\begin{aligned}
\langle x\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot |\,\Psi(x,0)|^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^a x \cdot \left(\sqrt{\frac{3}{b}} \cdot \frac{x}{a}\right)^2 \mathrm{d}x + \int_a^b x \cdot \left(\sqrt{\frac{3}{b}} \cdot \frac{b-x}{b-a}\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{b} \cdot \left(\frac{1}{a^2}\int_0^a x^3 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b x(b-x)^2 \,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{3}{b} \cdot \left(\frac{1}{a^2} \cdot \frac{x^4}{4}\bigg|_0^a - \frac{1}{(b-a)^2}\int_{b-a}^0 (b-s)s^2 \,\mathrm{d}s\right) \\
&= \frac{3}{b} \cdot \left(\frac{1}{a^2} \cdot \frac{a^4}{4} + \frac{1}{(b-a)^2}\int_0^{b-a} (b-s)s^2 \,\mathrm{d}s\right) \\
&= \frac{3}{b} \cdot \left(\frac{a^2}{4} + \frac{1}{(b-a)^2} \cdot \left(\int_0^{b-a} bs^2 \,\mathrm{d}s - \int_0^{b-a} s^3 \,\mathrm{d}s\right)\right) \\
&= \frac{3}{b} \cdot \left(\frac{a^2}{4} + \frac{1}{(b-a)^2} \cdot \left(\frac{b(b-a)^3}{3} - \frac{(b-a)^4}{4}\right)\right) \\
&= \frac{3}{b} \cdot \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b(b-a)}{3} - \frac{(b-a)^2}{4}\right) \\
&= \frac{3}{b} \cdot \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2-ab}{3} - \frac{b^2-2ab+a^2}{4}\right) \\
&= \frac{3}{b} \cdot \left(\frac{b^2-ab}{3} - \frac{b^2-2ab}{4}\right) \\
&= b - a - \frac{3b-6a}{4} = \frac{4b-4a-3b+6a}{4} = \frac{b+2a}{4}
\end{aligned}
$$

Auch dieses Resultat ist sinnvoll! Z.B. ist für $b = 2a$ der Erwartungswert $\langle x\rangle = \frac{2a+2a}{4} = a$, was aus Symmetriegründen sicher so sein muss. Und für $a = b$ ergibt sich $\langle x\rangle = \frac{b+2b}{4} = \frac{3b}{4}$, d.h., der Erwartungswert befindet sich erwartungsgemäss näher bei b. Symmetrisch dazu erhalten wir für $a = 0$ den Erwartungswert $\langle x\rangle = \frac{b}{4}$.