Übungen zur Quantenphysik – Lösungen Serie 11

1. *Erhaltungssätze der klassischen Mechanik*

   (a) *Fall 1: Komplett elastischer Stoß*

   Vor dem Stoß bewegt sich Schlitten 1 (Masse m_1) mit v_1, danach mit v_1'. Schlitten 2 (Masse m_2) hat vor dem Stoß keine Geschwindigkeit ($v_2 = 0$), danach beträgt sie v_2'. Wir notieren mit diesen Vorgaben die Energie- und die Impulserhaltung in einem Gleichungssystem und bestimmen daraus v_1' und v_2':

$$\begin{matrix}\text{Energieerhaltung:}\\ \text{Impulserhaltung:}\end{matrix} \quad \left|\begin{matrix} E_{\text{kin},1} + E_{\text{kin},2} = E'_{\text{kin},1} + E'_{\text{kin},2} \\ p_1 + p_2 = p_1' + p_2' \end{matrix}\right| \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{matrix} \frac{m_1 v_1^2}{2} + 0 = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} \\ m_1 v_1 + 0 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \end{matrix}\right|$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|\begin{matrix} m_1 v_1^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 \\ m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \end{matrix}\right| \quad \Leftrightarrow \quad \left|\begin{matrix} v_1^2 = v_1'^2 + \frac{m_2}{m_1} v_2'^2 \\ v_1 = v_1' + \frac{m_2}{m_1} v_2' \end{matrix}\right| \quad \Leftrightarrow \quad \left|\begin{matrix} v_1^2 = v_1'^2 + \frac{m_2}{m_1} v_2'^2 \\ v_1' = v_1 - \frac{m_2}{m_1} v_2' \end{matrix}\right|$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|\begin{matrix} v_1^2 = v_1'^2 + \frac{m_2}{m_1} v_2'^2 \\ v_1'^2 = v_1^2 - 2\frac{m_2}{m_1} v_1 v_2' + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 v_2'^2 \end{matrix}\right| \quad \Rightarrow \quad v_1^2 = v_1^2 - 2\,\frac{m_2}{m_1} v_1 v_2' + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 v_2'^2 + \frac{m_2}{m_1} v_2'^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = -2\frac{m_2}{m_1} v_1 v_2' + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 v_2'^2 + \frac{m_2}{m_1} v_2'^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = -2 v_1 v_2' + \frac{m_2}{m_1} v_2'^2 + v_2'^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = v_2' \cdot \left(-2v_1 + \frac{m_2}{m_1} v_2' + v_2'\right) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = v_2' \cdot \left(v_2' \cdot \left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right) - 2v_1\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = v_2' \cdot \left(v_2' \cdot \frac{m_2 + m_1}{m_1} - 2v_1\right) \quad \Leftrightarrow \quad v_2' = 0 \quad \text{oder} \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1$$

   Weshalb entstehen hier zwei Lösungen? Sind die Gesetze der Mechanik etwa nicht eindeutig und somit nicht deterministisch?

   Doch, doch! Alles bestens! Die Lösung $v_2' = 0$ steht nämlich für den Fall, dass gar kein Stoß stattfindet – das können unsere Gleichungen ja nicht wissen! – In diesem Fall ist automatisch auch $v_1' = v_1$. Klar, wenn gar kein Stoß passiert, dann ist hinterher alles beim Alten – auch oder gerade dann sind Energie- und Impulserhaltung ja ganz bestimmt erfüllt.

   Wir wollen nun v_1' bestimmen für den Fall, dass der Stoß wirklich stattfindet. Aus $v_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2} \cdot v_1$ folgt durch Einsetzen in die Impulserhaltung:

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 \cdot \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 \quad \Leftrightarrow \quad v_1 = v_1' + \cdot \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1$$

$$\Leftrightarrow \quad v_1' = v_1 - \cdot \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 = v_1 \cdot \left(1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) = \frac{m_1 + m_2 - 2m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1$$

   Zusammengefasst lauten unsere Lösungen für die Geschwindigkeiten nach dem Stoß also:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 \qquad \text{und} \qquad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1$$

   Damit können wir alle möglichen Fälle beurteilen. Zwei Beispiele:

   - Sind die beiden Massen gleich groß ($m_1 = m_2$), so wird $v_1' = 0$ und $v_2' = v_1$ sein. D.h., Schlitten 1 übergibt seine gesamte kinetische Energie an Schlitten 2 und bleibt nach dem Stoß stehen, während Schlitten 2 genau so schnell davon fährt, wie Schlitten 1 vor dem Stoß angekommen ist.
   - Für $m_2 > m_1$ wird v_1' negativ herauskommen, denn im Zähler von $\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$ steht die Massendifferenz $m_1 - m_2$. Ist also der anfänglich ruhende Schlitten 2 massiger als der ankommende Schlitten 1, so wird Letzterer beim Stoß zurückgeworfen ($v_1' < 0$ bringt das mathematisch zum Ausdruck).

(b) *Fall 2: Vollständig inelastischer Stoß*

Nun gilt die Energieerhaltung nicht mehr. D.h., es fällt eine Gleichung weg. Aber auch eine Unbekannte verschwindet, denn die Geschwindigkeiten der beiden Schlitten sollen nach dem Stoß ja identisch sein: $v' = v_1' = v_2'$. Wir folgern:

$$\text{Impulserhaltung:} \quad p_1 + p_2 = p_1' + p_2' \quad \Rightarrow \quad m_1 v_1 + 0 = m_1 v_1' + m_2 v_2' = m_1 v' + m_2 v'$$

$$\Leftrightarrow \quad m_1 v_1 = v'(m_1 + m_2) \quad \Leftrightarrow \quad v' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1$$

Es gibt nun nach dem Zusammenstoß sicher keine Rückwärtsbewegung mehr, denn der Massenbruch ist stets positiv und v_1 ja ebenso. Sind die Schlitten z.B. gleich massig, so bewegen sie sich nach dem Stoß genau halb so schnell wie der Schlitten 1 davor.

2. *Integralübungen zum Warmhalten*

(a) Für die Integrale ergibt sich:

i. $$\int_0^{\pi/3} x \sin(3x)\,\mathrm{d}x \overset{y=3x}{=} \frac{1}{9} \cdot \int_0^{\pi} y\, \sin y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{9} \cdot \left(\big[-y \cos y \big]\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos y\,\mathrm{d}y \right)$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \left(-\pi(-1) + 0 + \int_0^{\pi} \cos y\,\mathrm{d}y \right) = \frac{\pi}{9} \qquad \left(\int_0^{\pi} \cos y\,\mathrm{d}y = 0 \right)$$

ii. $$\int_7^{15} \sqrt{2x-5}\,\mathrm{d}x \overset{y=2x-5}{=} \frac{1}{2} \cdot \int_9^{25} \sqrt{y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \big[y\sqrt{y} \big]\Big|_9^{25} = \frac{1}{2} \cdot (125 - 27) = \frac{98}{3}$$

iii. $$\int_1^2 x^7 \ln x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^8}{8} \ln x \right]\Bigg|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^8}{8} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2^8}{8} \ln 2 - \frac{1}{8} \ln 1 - \frac{1}{8} \cdot \int_1^2 x^7\,\mathrm{d}x$$

$$= 32 \ln 2 - 0 - \frac{1}{8} \cdot \left[\frac{x^8}{8} \right]\Bigg|_1^2 = 32 \ln 2 - \frac{1}{64} (2^8 - 1) = 32 \ln 2 - \frac{255}{64}$$

iv. $$\int_{5\pi}^{8\pi} \sin\left(\frac{x}{6} - \frac{2\pi}{3} \right)\,dx \overset{y=\frac{x}{6}-\frac{2\pi}{3}}{=} 6 \cdot \int_{\pi/6}^{2\pi/3} \sin y\,dy = -6 \cdot \cos y \Big|_{\pi/6}^{2\pi/3}$$

$$= -6 \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 3 + 3\sqrt{3}$$

v. $$\int_0^6 \frac{2}{\sqrt{\frac{x}{3} + \frac{1}{4}}}\,\mathrm{d}x \overset{y=\frac{x}{3}+\frac{1}{4}}{=} 3 \cdot \int_{1/4}^{9/4} \frac{2}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y = 6 \cdot 2\sqrt{y}\Big|_{1/4}^{9/4} = 12 \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right) = 12$$

vi. $$\int_0^6 \frac{2x}{\sqrt{\frac{x}{3} + \frac{1}{4}}}\,\mathrm{d}x \overset{y=\frac{x}{3}+\frac{1}{4}}{=} 3 \cdot \int_{1/4}^{9/4} \frac{2\left(3y - \frac{3}{4}\right)}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}x = 18 \cdot \int_{1/4}^{9/4} \sqrt{y}\,\mathrm{d}y - \frac{9}{2} \cdot \int_{1/4}^{9/4} \frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y$$

$$= 18 \cdot \frac{2}{3} \cdot \big[y\sqrt{y} \big]\Big|_{1/4}^{9/4} - \frac{9}{2} \cdot 2\sqrt{y}\Big|_{1/4}^{9/4} = 12 \left(\frac{27}{8} - \frac{1}{8} \right) - 9 \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right) = 13 - 3 = 10$$

(b) Wir erhalten:

$$\int_1^2 \arcsin\left(1 - \frac{x}{2} \right)\,dx \overset{y=1-\frac{x}{2}}{=} -2 \cdot \int_{1/2}^{0} \arcsin y\,\mathrm{d}y = 2 \cdot \int_0^{1/2} \arcsin y\,\mathrm{d}y$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{2} + \sqrt{1 - \frac{1}{4}} - 0 - \sqrt{1-0} \right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right) = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - 2$$

3. *Rund um Operatoren*

(a) Für den Operator der quadratischen kinetischen Energie erhalten wir:

$$\widehat{T^2} = \left(\frac{\widehat{p}^2}{2m}\right)^2 = \frac{1}{4m^2} \cdot \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial x}\right)^4 = \frac{\hbar^4}{4m^2} \cdot \frac{\partial^4}{\partial x^4}$$

Dabei haben wir verwendet, dass $\mathrm{i}^4 = 1$ ist.

(b) Wir benutzen irgendeine Testfunktion $f(x,t)$ um darauf den Kommutator von Orts- und Impulsoperator anzuwenden:

$$\begin{aligned} [\widehat{x}, \widehat{p}]\, f(x,t) &= (\widehat{x}\,\widehat{p} - \widehat{p}\,\widehat{x})\, f(x,t) = \widehat{x}\,\widehat{p}\, f(x,t) - \widehat{p}\,\widehat{x}\, f(x,t) \\ &= x \cdot \frac{\hbar}{\mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial x}\, f(x,t) - \frac{\hbar}{\mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial x}\big(x \cdot f(x,t)\big) \end{aligned}$$

Wir sehen, wie im ersten Glied die Ableitung des Impulsoperators nur auf die Funktion f angewendet wird, während beim zweiten Operator das Produkt aus x und der Funktion f abgeleitet wird, wobei die Produktregel zur Anwendung kommt:

$$\begin{aligned} [\widehat{x}, \widehat{p}]\, f(x,t) &= x \cdot \frac{\hbar}{\mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial x}\, f(x,t) - \frac{\hbar}{\mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial x}\big(x \cdot f(x,t)\big) \\ &= \frac{\hbar x}{\mathrm{i}} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\, f(x,t) - \frac{\hbar x}{\mathrm{i}} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\, f(x,t) = \mathrm{i}\hbar\, f(x,t) \end{aligned}$$

Damit haben wir nun gesehen, dass der Kommutator des Ortsoperators selber ein Operator ist, der eine beliebige Funktion einfach mit $\mathrm{i}\hbar$ multipliziert, wenn er darauf angewendet wird. In Kurzform schreiben wir:

$$[\widehat{x}, \widehat{p}] = \mathrm{i}\hbar$$

Entscheidend ist, dass dies von 0 verschieden ist. Wir sagen: "Der Orts- und der Impulsoperator vertauschen nicht miteinander." Ort und Impuls lassen sich deswegen nicht gleichzeitig scharf messen.