Übungen zur Quantenphysik – Lösungen Serie 2

1. *Integrieren $\widehat{=}$ Lösen von linearen, inhomogenen Differentialgleichungen 1. Ordnung*

   (a) **Aufgabe:** $f'(x) = 8x^3 + 1$ mit RB: $f(-1) = 0$.

   Allgemeine Lösung: $f(x) = 2x^4 + x + C$.

   Erfüllung der RB: $f(-1) = 2 \cdot (-1)^4 - 1 + C = 2 - 1 + C = 1 + C \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow C = -1$.

   Eindeutige Lösung: $f(x) = 2x^4 + x - 1$.

   (b) **Aufgabe:** $f'(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ mit RB: $f(4) = \frac{13}{3}$.

   Allgemeine Lösung: $f(x) = \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\,x\sqrt{x} + C$.

   Erfüllung der RB: $f(4) = \frac{2}{3} \cdot 4\sqrt{4} + C = \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2 + C = \frac{16}{3} + C \stackrel{!}{=} \frac{13}{3} \Rightarrow C = -\frac{3}{3} = -1$.

   Eindeutige Lösung: $f(x) = \frac{2}{3}\,x\sqrt{x} - 1$.

   (c) **Aufgabe:** $f'(x) = \frac{1}{x}$ mit RB: $f(-\frac{1}{e^2}) = 0$.

   Allgemeine Lösung: $f(x) = \ln|x| + C$.

   Erfüllung der RB: $f(-\frac{1}{e^2}) = \ln\left(|-\frac{1}{e^2}|\right) + C = \ln\frac{1}{e^2} + C = \ln e^{-2} + C = -2 + C \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow C = 2$.

   Eindeutige Lösung: $f(x) = \ln|x| + 2$.

   (d) **Aufgabe:** $f'(x) = 4\cos(2x)$ mit RB: $f(\frac{\pi}{8}) = 2\sqrt{2}$.

   Allgemeine Lösung: $f(x) = 2\sin(2x) + C$.

   Erfüllung der RB: $f(\frac{\pi}{8}) = 2\sin(2 \cdot \frac{\pi}{8}) + C = 2\sin\frac{\pi}{4} + C = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + C = \sqrt{2} + C \stackrel{!}{=} 2\sqrt{2} \Rightarrow C = \sqrt{2}$.

   Eindeutige Lösung: $f(x) = 2\sin(2x) + \sqrt{2}$.

2. *Folgerungen aus der spektralen Energiedichte Plancks*

   (a) i. Für die infinitesimale Energiemenge $\mathrm{d}U(f)$ im Intervall von f bis $f + \mathrm{d}f$ notieren wir:

   $$\mathrm{d}U(f) = \frac{hf}{e^{hf/k_\mathrm{B}T} - 1} \cdot \frac{8\pi V}{c^3} \cdot f^2 \cdot \mathrm{d}f$$

   ii. Für jedes f schreiben wir nun $\frac{c}{\lambda}$ und für $\mathrm{d}f$ neu $-\frac{c}{\lambda^2} \cdot \mathrm{d}\lambda$.

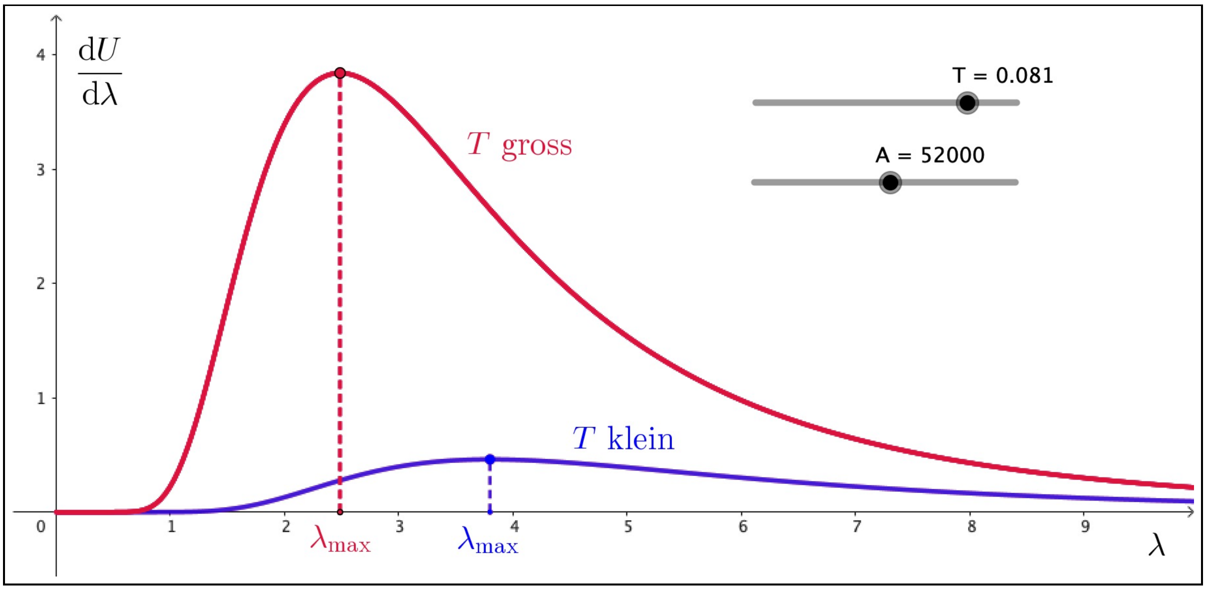
   iii. Daraus folgt:

   $$\begin{aligned}\mathrm{d}U(\lambda) &= \frac{h \cdot \frac{c}{\lambda}}{e^{hc/\lambda k_\mathrm{B}T} - 1} \cdot \frac{8\pi V}{c^3} \cdot \left(\frac{c}{\lambda}\right)^2 \cdot \frac{-c}{\lambda^2} \cdot \mathrm{d}\lambda = -\frac{h}{e^{hc/\lambda k_\mathrm{B}T} - 1} \cdot \frac{8\pi V}{c^3} \cdot \frac{c^3}{\lambda^3} \cdot \frac{c}{\lambda^2} \cdot \mathrm{d}\lambda \\ &= -\frac{8\pi V hc}{e^{hc/\lambda k_\mathrm{B}T} - 1} \cdot \frac{1}{\lambda^5} \cdot \mathrm{d}\lambda\end{aligned}$$

   iv. Schliesslich teilen wir durch $\mathrm{d}\lambda$ und verzichten auf das Minuszeichen:

   $$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{8\pi V hc}{e^{hc/\lambda k_\mathrm{B}T} - 1} \cdot \frac{1}{\lambda^5}$$

(b) Setzen wir $c = h = k_\mathrm{B} = 1$, so haben λ, $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\lambda}$ und T willkürliche Einheiten. Wir müssen ein bisschen suchen, welche Temperaturwerte nun schöne Graphen liefern. Dabei hilft es, einen zusätzlichen Schieberegler zu definieren, der als vertikaler Streckfaktor A in die Funktion eingebaut wird. Mit $0 < T < 0.1$ und $0 < A < 100\,000$ habe ich die folgende Grafik mit zwei Temperaturwerten erstellt:



(c) i. Wir notieren $f(\lambda)$ mit der Substitution $a := \frac{hc}{k_\mathrm{B}T}$:

$$f(\lambda) = \frac{1}{e^{hc/\lambda k_\mathrm{B}T} - 1} \cdot \frac{1}{\lambda^5} = \frac{1}{e^{a/\lambda} - 1} \cdot \frac{1}{\lambda^5}$$

ii. Nun kommt das Ableiten – quasi die Hauptherausforderung dieser Aufgabe. Zunächst notiere ich die **Produktregel** ganz ausführlich, sodass klar wird, was ich anschließend genau mache:

$$f(\lambda) = \underbrace{\frac{1}{e^{a/\lambda} - 1}}_{=r(\lambda)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\lambda^5}}_{=s(\lambda)} \quad \Rightarrow \quad f'(\lambda) = r'(\lambda) \cdot s(\lambda) + r(\lambda) \cdot s'(\lambda)$$
$$= \left[\frac{1}{e^{a/\lambda} - 1}\right]' \cdot \frac{1}{\lambda^5} + \frac{1}{e^{a/\lambda} - 1} \cdot \left[\frac{1}{\lambda^5}\right]'$$

Schauen wir uns die beiden Ableitungen separat an. Zuerst die einfachere:

$$\left[\frac{1}{\lambda^5}\right]' = \frac{-5}{\lambda^6}$$

Anspruchsvoller ist die andere Ableitung, denn sie benötigt eine doppelte Anwendung der **Kettenregel**. Hier nochmals die Verschachtelung, die so auch in der Aufgabenstellung angegeben ist:

$$\frac{1}{e^{a/\lambda} - 1} = u\Big(v\big(w(\lambda)\big)\Big) \qquad \text{mit} \qquad w(\lambda) = \frac{a}{\lambda} \qquad v(w) = e^w - 1 \qquad u(v) = \frac{1}{v}$$

Bilden wir zunächst die drei Einzelableitungen:

$$w'(\lambda) = \frac{-a}{\lambda^2}$$
$$v'(w) = e^w = e^{\frac{a}{\lambda}}$$
$$u'(v) = \frac{-1}{v^2} = \frac{-1}{\left(e^w - 1\right)^2} = \frac{-1}{\left(e^{a/\lambda} - 1\right)^2}$$

Daraus folgt für die Ableitung von $r(\lambda)$:

$$\left[\frac{1}{e^{a/\lambda} - 1}\right]' = u'\Big(v\big(w(\lambda)\big)\Big) \cdot v'\big(w(\lambda)\big) \cdot w'(\lambda) = \frac{-1}{\left(e^{a/\lambda} - 1\right)^2} \cdot e^{\frac{a}{\lambda}} \cdot \frac{-a}{\lambda^2} = \frac{a \cdot e^{a/\lambda}}{\left(e^{a/\lambda} - 1\right)^2} \cdot \frac{1}{\lambda^2}$$

Jetzt sind wir bereit die gesamte Ableitung von $f(\lambda)$ zusammenzusetzen:

$$\begin{aligned} f'(\lambda) &= \left[\frac{1}{e^{a/\lambda}-1}\right]' \cdot \frac{1}{\lambda^5} + \frac{1}{e^{a/\lambda}-1} \cdot \left[\frac{1}{\lambda^5}\right]' \\ &= \frac{a \cdot e^{a/\lambda}}{\left(e^{a/\lambda}-1\right)^2} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{\lambda^5} + \frac{1}{e^{a/\lambda}-1} \cdot \frac{-5}{\lambda^6} = \frac{a \cdot e^{a/\lambda}}{\left(e^{a/\lambda}-1\right)^2} \cdot \frac{1}{\lambda^7} - \frac{5}{e^{a/\lambda}-1} \cdot \frac{1}{\lambda^6} \end{aligned}$$

iii. Aus den beiden Gliedern lässt sich einiges ausklammern (siehe Vorschlag in der Aufgabenstellung):

$$f'(\lambda) = \frac{1}{\left(e^{a/\lambda}-1\right)^2} \cdot \frac{1}{\lambda^7} \cdot \left(a \cdot e^{\frac{a}{\lambda}} - 5\lambda \cdot \left(e^{\frac{a}{\lambda}}-1\right)\right)$$

Zur Bestimmung der Extremalstelle muss diese Ableitung gleich 0 gesetzt werden:

$$f'(\lambda) = \underbrace{\frac{1}{\left(e^{a/\lambda}-1\right)^2} \cdot \frac{1}{\lambda^7}}_{\neq 0} \cdot \left(a \cdot e^{\frac{a}{\lambda}} - 5\lambda \cdot \left(e^{\frac{a}{\lambda}}-1\right)\right) \stackrel{!}{=} 0$$

Nur der hintere Faktor (= grosse Klammer) kann überhaupt 0 werden. Somit muss dort unser $\lambda_{\max}$ als Lösung entstehen:

$$a \cdot e^{\frac{a}{\lambda}} - 5\lambda \cdot \left(e^{\frac{a}{\lambda}}-1\right) = 0$$

iv. Diese Gleichung lässt sich noch etwas verschönern, indem wir sie zunächst durch λ dividieren, dann die Klammer auflösen und neu zusammenfassen:

$$\begin{aligned} a \cdot e^{\frac{a}{\lambda}} - 5\lambda \cdot \left(e^{\frac{a}{\lambda}}-1\right) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{a}{\lambda} \cdot e^{\frac{a}{\lambda}} - 5 \cdot \left(e^{\frac{a}{\lambda}}-1\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{a}{\lambda} \cdot e^{\frac{a}{\lambda}} - 5 \cdot e^{\frac{a}{\lambda}} + 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad e^{\frac{a}{\lambda}} \cdot \left(\frac{a}{\lambda} - 5\right) + 5 = 0 \end{aligned}$$

Wenn wir jetzt noch $\frac{a}{\lambda}$ durch x substituieren, erhalten wir eine recht übersichtliche Gleichung:

$$e^x\,(x-5) + 5 = 0$$

In der Aufgabenstellung wird gesagt, dass dies eine transzendente Gleichung ist und die Lösung x somit nicht als geschlossener algebraischer Ausdruck notierbar ist. Wir müssen eine Näherungslösung finden. Z.B. können wir dafür die **num solve**-Funktion des TRs benutzen, die uns für beliebige Gleichungen numerische Lösungen liefert. In GeoGebra können wir die Funktion $e^x\,(x-5)+5$ deklarieren und hinterher nach ihren Nullstellen fragen.
Welche Methode auch immer angewendet wird, die korrekte Näherungslösung lautet auf fünf Nachkommastellen genau:

$$x \approx 4.96511$$

v. Diesen Wert können wir nun in unseren Substitutionen zurückeinsetzen:

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{\lambda_{\max}} = \frac{hc}{\lambda_{\max} k_{\mathrm{B}} T} \\ \Rightarrow \quad \lambda_{\max} &= \frac{hc}{x k_{\mathrm{B}} T} \approx \frac{6.626\,070\,15 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J} \cdot \mathrm{s} \cdot 299\,792\,458\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{4.96511 \cdot 1.380\,649 \cdot 10^{-23}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}} \cdot \frac{1}{T} \\ &= 2.898 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{K} \cdot \frac{1}{T} = \frac{2898\,\mu\mathrm{m} \cdot \mathrm{K}}{T} \end{aligned}$$

Wir landen tatsächlich beim Wien'schen Verschiebungsgesetz. Dieses ist als Aussage also komplett im Planck'schen Strahlungsgesetz enthalten!