# Übungen zur Quantenphysik – Lösungen Serie 3

1. *Konjugiert Komplexes, Betrag und Kehrwert einer komplexen Zahl*

   (a) $z_1 = 2 + \mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad z_1^* = 2 - \mathrm{i} \qquad |z_1| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \qquad z_1^{-1} = \dfrac{z_1^*}{|z_1|^2} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}\,\mathrm{i}$

   (b) $z_2 = 4 - 3\mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad z_2^* = 4 + 3\mathrm{i} \qquad |z_2| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \qquad z_2^{-1} = \dfrac{z_2^*}{|z_2|^2} = \dfrac{4}{25} + \dfrac{3}{25}\,\mathrm{i}$

   (c) $z_3 = -24 + 7\mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad z_3^* = -24 - 7\mathrm{i} \qquad |z_3| = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25 \qquad z_3^{-1} = \dfrac{z_3^*}{|z_3|^2} = -\dfrac{24}{625} - \dfrac{7}{625}\,\mathrm{i}$

2. *Division komplexer Zahlen*

   (a) $\dfrac{13 - 5\mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}} = \dfrac{13 - 5\mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}} \cdot \dfrac{1 + \mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}} = \dfrac{13 + 13\mathrm{i} - 5\mathrm{i} - 5\mathrm{i}^2}{1 - \mathrm{i}^2} = \dfrac{13 + 8\mathrm{i} + 5}{1 + 1} = \dfrac{18 + 8\mathrm{i}}{2} = 9 + 4\mathrm{i}$

   (b) $\dfrac{2 - \frac{1}{2}\mathrm{i}}{2 + \frac{1}{2}\mathrm{i}} = \dfrac{2 - \frac{1}{2}\mathrm{i}}{2 + \frac{1}{2}\mathrm{i}} \cdot \dfrac{2 - \frac{1}{2}\mathrm{i}}{2 - \frac{1}{2}\mathrm{i}} = \dfrac{4 - 2\mathrm{i} - \frac{1}{4}}{4 + \frac{1}{4}} = \dfrac{\frac{15}{4} - 2\mathrm{i}}{\frac{17}{4}} = \dfrac{15}{4} \cdot \dfrac{4}{17} - 2 \cdot \dfrac{4}{17}\,\mathrm{i} = \dfrac{15}{17} - \dfrac{8}{17}\,\mathrm{i}$

   (c) $\dfrac{4\mathrm{i}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}\,\mathrm{i}} = \dfrac{4i}{\sqrt{3} + \sqrt{5}\,\mathrm{i}} \cdot \dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{5}\,\mathrm{i}}{\sqrt{3} - \sqrt{5}\,\mathrm{i}} = \dfrac{4\sqrt{3}\,\mathrm{i} - 4\sqrt{5}\,\mathrm{i}^2}{3 - 5\mathrm{i}^2} = \dfrac{4\sqrt{5} + 4\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{8} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}$

3. *Der Identifikationstrick*

   i. Mit der Summenschreibweise $z = x + \mathrm{i}y$ erhalten wir durch ausmultiplizieren:

   $$(-2 + 7\mathrm{i})z = -5 + 97\mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad (-2 + 7\mathrm{i})(x + y\mathrm{i}) = -5 + 97\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad -2x - 2y\mathrm{i} + 7x\mathrm{i} - 7y = -5 + 97\mathrm{i}$$

   ii. Wir sortieren links nach reellen und imaginären Gliedern:

   $$-2x - 7y + 7x\mathrm{i} - 2y\mathrm{i} = -5 + 97\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad -2x - 7y + (7x - 2y)\mathrm{i} = -5 + 97\mathrm{i}$$

   iii. Jetzt lassen sich die Real- und die Imaginärteile links und rechts in der Gleichung je miteinander identifizieren und wir erhalten ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten:

   $$\left| \begin{array}{c} -2x - 7y = -5 \\ 7x - 2y = 97 \end{array} \right|$$

   iv. Dieses Gleichungssystem lässt sich z.B. mit dem Additionsverfahren lösen:

   $$\left| \begin{array}{c} -2x - 7y = -5 \\ 7x - 2y = 97 \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} -14x - 49y = -35 \\ 14x - 4y = 194 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad -53y = 169 \quad \Rightarrow \quad y = -3$$

   $$\Rightarrow \quad -2x - 7 \cdot (-3) = -5 \quad \Leftrightarrow \quad x = 13 \quad \Rightarrow \quad z = 13 - 3\mathrm{i}$$

   Zur Überprüfung des Resultates können wir z.B. zurückeinsetzen:

   $$(-2 + 7\mathrm{i}) \cdot z = (-2 + 7\mathrm{i}) \cdot (13 - 3\mathrm{i}) = -26 + 6\mathrm{i} + 91\mathrm{i} + 21 = -5 + 97\mathrm{i}$$

   Andererseits sollten wir durch effizientere Divisionsmethode auf dasselbe Resultat kommen:

   $$\frac{-5 + 97\mathrm{i}}{-2 + 7\mathrm{i}} \cdot \frac{-2 - 7\mathrm{i}}{-2 - 7\mathrm{i}} = \frac{10 + 35\mathrm{i} - 194\mathrm{i} + 679}{4 + 49} = \frac{689 - 159\mathrm{i}}{53} = 13 - 3\mathrm{i}$$

4. *Differentialgleichungen mit gegebenem Funktionsansatz zu Ende lösen*

(a) Aufgabe: $x^2 f''(x) - 2xf'(x) + 2f(x) = 6$ mit RBs: $f(2) = 17$ und $f'(-1) = -1$.

Ableitungen: $f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b$ und $f''(x) = 2a$.

Einsetzen: $x^2 \cdot 2a - 2x \cdot (2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = 6 \Leftrightarrow 2ax^2 - 4ax^2 - 2bx + 2ax^2 + 2bx + 2c = 6$
$\Leftrightarrow 2c = 6 \Leftrightarrow c = 3$.

Allgemeine Lösung: $f(x) = ax^2 + bx + 3$.

Erfüllung der RBs: $f(2) = 4a + 2b + 3 \overset{!}{=} 17$ und $f'(-1) = -2a + b \overset{!}{=} -1 \Rightarrow a = 2$ und $b = 3$.

Eindeutige Lösung: $f(x) = 2x^2 + 3x + 3$.

(b) Aufgabe: $f''(x) = -3f'(x) + 4f(x) + 8x^2$ mit RBs: $f(0) = 0$ und $f'(0) = 0$.

Ableitungen: $f(x) = -2x^2 - 3x - \frac{13}{4} + A\,e^{-4x} + B\,e^x \Rightarrow f'(x) = -4x - 3 - 4A\,e^{-4x} + B\,e^x$
$\Rightarrow f''(x) = -4 + 16A\,e^{-4x} + B\,e^x$.

Einsetzen: $-4+16Ae^{-4x}+Be^x = -3(-4x-3-4Ae^{-4x}+Be^x)+4(-2x^2-3x-\frac{13}{4}+Ae^{-4x}+Be^x)+8x^2$
$\Leftrightarrow -4 + 16Ae^{-4x} + Be^x = 12x + 9 + 12Ae^{-4x} - 3Be^x - 8x^2 - 12x - 13 + 4Ae^{-4x} + 4Be^x + 8x^2$
$\Leftrightarrow 0 = 0 \Rightarrow$ Gleichung ist für alle $x$ erfüllt!

Erfüllung der RBs: $f(0) = -\frac{13}{4} + A + B \overset{!}{=} 0$ und $f'(0) = -3 - 4A + B \overset{!}{=} 0 \Rightarrow A = \frac{1}{20}$ und $B = \frac{16}{5}$.

Eindeutige Lösung: $f(x) = -2x^2 - 3x - \frac{13}{4} + \frac{1}{20}\,e^{-4x} + \frac{16}{5}\,e^x$.

(c) Aufgabe: $f'(x) = -\sin x \cdot f(x)$ mit RB: $f'(\frac{\pi}{3}) = 1$.

Ableitung: $f(x) = A\,e^{\cos x} \Rightarrow f'(x) = A\,e^{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\sin x \cdot A\,e^{\cos x}$.

Einsetzen: $-\sin x \cdot A\,e^{\cos x} = -\sin x \cdot A\,e^{\cos x}$ stimmt immer.

Ansatz $f(x) = A\,e^{\cos x}$ entspricht somit bereits der allgemeinen Lösung.

Erfüllung der RB: $f'(\frac{\pi}{3}) = -\sin\frac{\pi}{3} \cdot A\,e^{\cos\frac{\pi}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot A\,e^{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3e}}{2}\,A \overset{!}{=} 1 \Rightarrow A = -\frac{2}{\sqrt{3e}}$.

Eindeutige Lösung: $f(x) = -\frac{2}{\sqrt{3e}} \cdot e^{\cos x}$.

(d) Aufgabe: $f'(x) - \frac{x^2}{f^2(x)} \cdot (x^2 + 2) = 0$ mit RB: $f(0) = -3$.

Ableitungen: $f(x) = \sqrt[3]{\frac{3}{5}x^5 + 2x^3 + 3c} = \left(\frac{3}{5}x^5 + 2x^3 + 3c\right)^{\frac{1}{3}}$
$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{5}x^5 + 2x^3 + 3c\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{5}x^5+2x^3+3c}^{\,2}} \cdot (3x^4 + 6x^2)$.

Einsetzen: $\frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{5}x^5+2x^3+3c}^{\,2}} \cdot (3x^4 + 6x^2) - \frac{x^2}{\sqrt[3]{\frac{3}{5}x^5+2x^3+3c}^{\,2}} \cdot (x^2 + 2) = 0$
$\Leftrightarrow \frac{3x^4+6x^2}{3} - x^2(x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ ist für alle $x$ erfüllt.

Erfüllung der RB: $f(0) = \sqrt[3]{3c} \overset{!}{=} -3 \Leftrightarrow 3c = -27 \Leftrightarrow c = -9$.

Eindeutige Lösung: $f(x) = \sqrt[3]{\frac{3}{5}x^5 + 2x^3 - 27}$.

5. *Radioaktive Zerfälle und Zerfallsgesetz*

(a) Als Ansatz für die Differentialgleichung $N'(t) = -\lambda \cdot N(t)$ muss wohl eine Exponentialfunktion gewählt werden, denn solche Funktionen bleiben beim Ableiten im Wesentlichen gleich.

In der Physik wählen wir in der Regel die Exponentialfunktion mit Basis $e$ und setzen an:

$$N(t) = A \cdot e^{-\lambda t}$$

Der Faktor $-\lambda$ im Exponenten erzeugt ganz automatisch den Vorfaktor von $N(t)$ in der DGL.

Der Faktor $A$ ist der frei wählbare Parameter, der in eine gewöhnliche, lineare und homogene DGL 1. Ordnung eingebaut werden muss, um alle möglichen Lösungen abzudecken. Wir sehen bei der Kontrolle sofort, dass dieses $A$ für die Richtigkeit der DGL keine Rolle spielt:

$$N'(t) = A \cdot e^{-\lambda t} \cdot (-\lambda) = -\lambda \cdot A \cdot e^{-\lambda t} = -\lambda \cdot N(t) \quad \checkmark$$

(b) Die Anfangsbedingung lautet: $N(0) = N_0$. Daraus folgt sofort:

$$N(0) = A \cdot e^{-\lambda \cdot 0} = A \cdot 1 = A \stackrel{!}{=} N_0 \quad \Rightarrow \quad N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

(c) Lassen wir eine Halbwertzeit $T_{1/2}$ verstreichen, so muss sich die Anzahl noch vorhandener Kerne halbiert haben. Daraus folgt:

$$N(T_{1/2}) \stackrel{!}{=} \frac{N_0}{2} \quad \Rightarrow \quad N_0 \cdot e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{N_0}{2} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\lambda T_{1/2} = \ln \frac{1}{2}$$

Mit $\ln \frac{1}{2} = \ln 2^{-1} = -\ln 2$ ergibt sich:

$$-\lambda T_{1/2} = \ln \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\lambda T_{1/2} = -\ln 2 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

Tatsächlich ist die Zerfallskonstante $\lambda$ umso kleiner, je grösser die Halbwertzeit $T_{1/2}$ ist.

**Abschliessende Anmerkung zur Differentialgleichung:** Überall dort, wo die Veränderung einer Grösse proportional zur Grösse selber ist, ergeben sich exponentielle Entwicklungen! Das gilt nicht nur für Abnahmen, sondern auch für das Wachstum. Hat man z.B. einen Betrag auf einem Sparkonto mit fixem Zinssatz und hebt nie etwas ab, dann wächst dieser Betrag exponentiell, weil die Zunahme, also der Zins, proportional zum bereits vorhandenen Betrag ist. Analog können die Fallzahlen bei Epidemien eine Zeit lang exponentiell anwachsen, weil die Anzahl Neuansteckungen proportional zur Zahl der bereits infizierten Menschen ist.

6. *Aufgaben zum Fotoeffekt und zu $E_\gamma = hf$*

(a) Wir multiplizieren das Planck'sche Wirkungsquantum $h$ mit der Lichtgeschwindigkeit und erhalten:

$$hc = 6.626\,070\,015 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}\cdot 299\,792\,458\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 1.986\,446 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{m}$$

Darin wollen wir $\mathrm{J}$ durch $\mathrm{eV}$ und $\mathrm{m}$ durch $\mathrm{nm}$ ersetzen. Es gilt:

$$1\,\mathrm{eV} = 1.602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}\cdot\mathrm{V} = 1.602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$$
$$\Rightarrow \quad 1\,\mathrm{J} = \frac{1\,\mathrm{eV}}{1.602\,176\,634 \cdot 10^{-19}} = 6.241\,509 \cdot 10^{18}\,\mathrm{eV}$$

Somit folgt für $hc$:

$$hc = 1.986\,446 \cdot 10^{-25} \cdot 6.241\,509 \cdot 10^{18}\,\mathrm{eV}\cdot 10^{9}\,\mathrm{nm} = 1239.842\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm} \approx 124\underline{0}\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm}$$

(b) Für die Photonenenergie ergibt sich:

$$E_\gamma = hf = h\cdot\frac{c}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda}$$

(c) Am besten ermitteln wir die Steigung aufgrund der gegebenen Punkte, bei Caesium z.B.:

$$m_\mathrm{C} = \frac{1.9\,\mathrm{eV}}{0.46\,\mathrm{PHz}} = \frac{1.9\cdot 1.602\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}\cdot\mathrm{V}}{0.46\cdot 10^{15}\,\mathrm{Hz}} = \frac{1.9\cdot 1.602\cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}}{0.46\cdot 10^{15}\,\frac{1}{\mathrm{s}}} = 6.62\cdot 10^{-34}\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{s} \approx h$$

Ganz analog erhalten wir Werte bei Magnesium und Zink. Es ist nicht zu erwarten, dass diese Werte ganz besonders genau den exakten Wert von $h$ treffen, denn die Austrittsarbeit $\phi$ ist ja nur mit zwei signifikante Ziffern gegeben.

(d) Das einzelne Photon muss mindestens $4.3\,\mathrm{eV}$ Energie tragen. Unter Verwendung von $E_\gamma = \frac{hc}{\lambda}$ und $hc = 1240\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm}$ ergibt sich für die maximale Wellenlänge sofort:

$$E_\gamma = \frac{hc}{\lambda} \quad\Leftrightarrow\quad \lambda = \frac{hc}{E_\gamma} = \frac{1240\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm}}{4.3\,\mathrm{eV}} = 288\,\mathrm{nm}$$

Diese Wellenlänge liegt im Ultravioletten. D.h. eben, bei Zink gibt es keine optischen Wellenlängen, die Elektronen herausschlagen könnten.

(e) Die Austrittsarbeit von Wolfram beträgt $\phi = 4.5\,\mathrm{eV}$. Wenn wir wollen, dass der Fotostrom gerade ganz zum Erliegen kommt, dann muss die Bremspotential $U_\mathrm{B}$ genau so gross gewählt werden, dass der damit verbundene Umsatz an elektrischer Energie $\Delta E = U_\mathrm{B}\cdot e$ der maximal möglichen kinetischen Energie $E_\mathrm{kin,max}$ entspricht. Letztere erhalten wir aus der Einstein'schen Beziehung zum Fotoeffekt:

$$E_\mathrm{kin,max} = hf - \phi = \frac{hc}{\lambda} - \phi = \frac{1240\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm}}{150\,\mathrm{nm}} - 4.5\,\mathrm{eV} = 3.8\,\mathrm{eV}$$

Damit beträgt das Grenz-Bremspotential $3.8\,\mathrm{V}$.

(f) Die Energie eines Photons von $632.8\,\mathrm{nm}$ Wellenlänge beträgt:

$$E_\gamma = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm}}{632.8\,\mathrm{nm}} = 1.9595\,\mathrm{eV} = 3.1392\cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$$

Pro Sekunde entsendet der Laser ein halbes Millijoule an Strahlungsenergie. Da wir die Energie des einzelnen Photons kennen, können wir die sekündliche Photonenzahl nun direkt berechnen:

$$N = \frac{\Delta E}{E_\gamma} = \frac{0.5\cdot 10^{-3}\,\mathrm{J}}{3.1392\cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}} = 1.6\cdot 10^{15}$$

Es werden also 1600 Billionen Photonen pro Sekunden emittiert!