Übungen zur Quantenphysik – Lösungen Serie 4

1. *Mehr Aufgabenstellungen mit komplexen Zahlen*

   (a) Wir benutzen die Ausmultiplikation mittels Binomialkoeffizienten (Pascal'sches Dreieck):

   i. $(2-\mathrm{i})^4 = 2^4 - 4\cdot 2^3\cdot \mathrm{i} + 6\cdot 2^2\cdot \mathrm{i}^2 - 4\cdot 2\cdot \mathrm{i}^3 + \mathrm{i}^4 = 16 - 32\mathrm{i} - 24 + 8\mathrm{i} + 1 = -7 - 24\mathrm{i}$

   ii. $\mathrm{Re}\big((-1+\mathrm{i})^5\big) = \mathrm{Re}\big((\mathrm{i}-1)^5\big) = \mathrm{Re}\big(\mathrm{i}^5 - 5\mathrm{i}^4 + 10\mathrm{i}^3 - 10\mathrm{i}^2 + 5\mathrm{i} - 1\big)$

   Alle ungeraden Potenzen von i werden nichts zum Realteil beitragen, sodass wir schreiben können:

   $$\mathrm{Re}\big((-1+\mathrm{i})^5\big) = -5\mathrm{i}^4 - 10\mathrm{i}^2 - 1 = -5 + 10 - 1 = 4$$

   Ganz ähnlich verfahren wir bei der Bestimmung des Imaginärteils in iii., wobei jetzt die geraden Potenzen von i herausfallen:

   iii. $$\mathrm{Im}\left(\left(2-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^6\right) = \mathrm{Im}\left(2^6 - 6\cdot 2^5\cdot\frac{\mathrm{i}}{2} + 15\cdot 2^4\cdot\frac{\mathrm{i}^2}{2^2} - 20\cdot 2^3\cdot\frac{\mathrm{i}^3}{2^3} + 15\cdot 2^2\cdot\frac{\mathrm{i}^4}{2^4} - 6\cdot 2\cdot\frac{\mathrm{i}^5}{2^5} + \frac{\mathrm{i}^6}{2^6}\right)$$
   $$= \mathrm{Im}\left(-6\cdot 2^5\cdot\frac{\mathrm{i}}{2} - 20\cdot 2^3\cdot\frac{\mathrm{i}^3}{2^3} - 6\cdot 2\cdot\frac{\mathrm{i}^5}{2^5}\right)$$
   $$= \mathrm{Im}\left(-6\cdot 2^4\,\mathrm{i} - 20\,\mathrm{i}^3 - 3\cdot\frac{\mathrm{i}^5}{2^3}\right) = \mathrm{Im}\left(-96\mathrm{i} + 20\mathrm{i} - 3\cdot\frac{\mathrm{i}}{8}\right) = -76\,\frac{3}{8}$$

   (b) Grundsätzlich können wir immer $z = x + y\mathrm{i}$ resp. $z^* = x - y\mathrm{i}$ einsetzen und danach separat die Real- und die Imaginärteile beider Gleichungsseiten einander gleichsetzen. Dabei sind $\mathrm{Re}(z) = x$ und $\mathrm{Im}(z) = y$:

   i. $(1+2\mathrm{i})z = (5-\mathrm{i})z + 7 + 26\mathrm{i} \quad\Leftrightarrow\quad (1+2\mathrm{i})(x+y\mathrm{i}) = (5-\mathrm{i})(x+y\mathrm{i}) + 7 + 26\mathrm{i}$

   $\Leftrightarrow\quad x + y\mathrm{i} + 2x\mathrm{i} - 2y = 5x + 5y\mathrm{i} - x\mathrm{i} + y + 7 + 26\mathrm{i}$

   $\Leftrightarrow\quad x - 2y + (y+2x)\mathrm{i} = 5x + y + 7 + (-x + 5y + 26)\mathrm{i}$

   $$\Rightarrow\quad \left|\begin{matrix} x - 2y = 5x + y + 7 \\ y + 2x = -x + 5y + 26\end{matrix}\right| \quad\Leftrightarrow\quad \left|\begin{matrix} 4x + 3y = -7 \\ 3x - 4y = 26\end{matrix}\right| \quad\Leftrightarrow\quad \left|\begin{matrix} 16x + 12y = -28 \\ 9x - 12y = 78\end{matrix}\right|$$

   $\Rightarrow\quad 25x = 50 \quad\Leftrightarrow\quad x = 2 \quad\Rightarrow\quad 8 + 3y = -7 \quad\Leftrightarrow\quad 3y = -15 \quad\Leftrightarrow\quad y = -5$

   $\Rightarrow\quad z = x + yi = 2 - 5i$

   ii. $(2+\mathrm{i})z - 3\mathrm{Re}(z) = -18 + 30\mathrm{i} \quad\Leftrightarrow\quad (2+\mathrm{i})(x+y\mathrm{i}) - 3x = -18 + 30\mathrm{i}$

   $\Leftrightarrow\quad 2x + 2y\mathrm{i} + x\mathrm{i} - y - 3x = -18 + 30\mathrm{i} \quad\Leftrightarrow\quad -x - y + (x+2y)\mathrm{i} = -18 + 30\mathrm{i}$

   $$\Rightarrow\quad \left|\begin{matrix} -x - y = -18 \\ x + 2y = 30\end{matrix}\right| \quad\Rightarrow\quad y = 12 \quad\Rightarrow\quad x + 24 = 30 \quad\Leftrightarrow\quad x = 6$$

   $\Rightarrow\quad z = x + y\mathrm{i} = 6 + 12\mathrm{i}$

   iii. $z + 2\mathrm{i}z^* = 8 + 7\mathrm{i} \quad\Leftrightarrow\quad x + y\mathrm{i} + 2\mathrm{i}(x - y\mathrm{i}) = 8 + 7\mathrm{i}$

   $\Leftrightarrow\quad x + y\mathrm{i} + 2x\mathrm{i} + 2y = 8 + 7\mathrm{i} \quad\Leftrightarrow\quad x + 2y + (2x+y)\mathrm{i} = 8 + 7\mathrm{i}$

   $$\Rightarrow\quad \left|\begin{matrix} x + 2y = 8 \\ 2x + y = 7\end{matrix}\right| \quad\Leftrightarrow\quad \left|\begin{matrix} x + 2y = 8 \\ -4x - 2y = -14\end{matrix}\right| \quad\Rightarrow\quad -3x = -6 \quad\Leftrightarrow\quad x = 2$$

   $\Rightarrow\quad 2 + 2y = 8 \quad\Leftrightarrow\quad 2y = 6 \quad\Leftrightarrow\quad y = 3 \quad\Rightarrow\quad z = x + y\mathrm{i} = 2 + 3\mathrm{i}$

iv. $\dfrac{z-3\mathrm{i}-3}{z+2+4\mathrm{i}}=\mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad z-3\mathrm{i}-3=\mathrm{i}(z+2+4\mathrm{i})=z\mathrm{i}+2\mathrm{i}-4$

$$\Leftrightarrow \quad z-z\mathrm{i}=-1+5\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad z(1-\mathrm{i})=-1+5\mathrm{i}$$

$$\Leftrightarrow \quad z=\frac{-1+5\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{-1+5\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\cdot\frac{1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{-1+5\mathrm{i}-\mathrm{i}-5}{1+1}=\frac{-6+4\mathrm{i}}{2}=-3+2\mathrm{i}$$

v. $\mathrm{Im}(z^*+1)+\mathrm{i}\mathrm{Re}(-z+2)=-\dfrac{1}{2}-6\mathrm{i}$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(x-y\mathrm{i}+1)+\mathrm{i}\mathrm{Re}(-x-y\mathrm{i}+2)=-\frac{1}{2}-6\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad -y+(-x+2)\mathrm{i}=-\frac{1}{2}-6\mathrm{i}$$

$$\Rightarrow \quad \left| \begin{array}{c} -y=-\frac{1}{2} \\ -x+2=-6 \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} y=\frac{1}{2} \\ x=8 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad z=x+y\mathrm{i}=8+\frac{1}{2}\mathrm{i}$$

2. *Zwei Reibungsarten: Veranschaulichungen zum Aktionsprinzip als Differentialgleichung*

(a) *Konstante Reibungskraft (z.B. Rollreibung)*

i. Zuerst leiten wir den gegebenen Funktionsansatz zweimal ab:

$$x(t)=A+Bt+Ct^2 \quad \Rightarrow \quad x'(t)=B+2Ct \quad \Rightarrow \quad x''(t)=2C$$

Soll die DGL stimmen so folgt:

$$x''(t)=2C=-\frac{\alpha}{m} \quad \Leftrightarrow \quad C=-\frac{\alpha}{2m} \quad \Rightarrow \quad x(t)=A+Bt-\frac{\alpha}{2m}t^2$$

ii. Dies ist die allgemeine Lösung für die Bewegung eines Körpers mit Masse m bei konstanter Bremskraft $-\alpha$. Sie muss nun noch an die Anfangsbedingungen $x(0)=0$ und $v(0)=x'(0)=v_0$ angepasst werden, wodurch die beiden Parameter A und B festgelegt werden:

$$x(0)=A\stackrel{!}{=}0 \quad \Rightarrow \quad A=0 \qquad \text{und} \qquad x'(0)=B\stackrel{!}{=}v_0 \quad \Rightarrow \quad B=v_0$$

$$\Rightarrow \quad x(t)=v_0t-\frac{\alpha}{2m}\cdot t^2$$

Das ist die altbekannte Bewegungsgleichung $x(t)=v_0t+\frac{a}{2}t^2$ zur gleichmässig beschleunigten Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit v_0 und Beschleunigung $a=-\frac{\alpha}{m}$.

iii. Der Wagen hat fertig ausgerollt, wenn $v(t)=0$ ist. Daraus folgt für die Zeit t_{end} bis zum Stillstand:

$$v(t_{\mathrm{end}})=v_0-\frac{\alpha}{m}\cdot t_{\mathrm{end}}\stackrel{!}{=}0 \quad \Rightarrow \quad t_{\mathrm{end}}=\frac{v_0m}{\alpha}$$

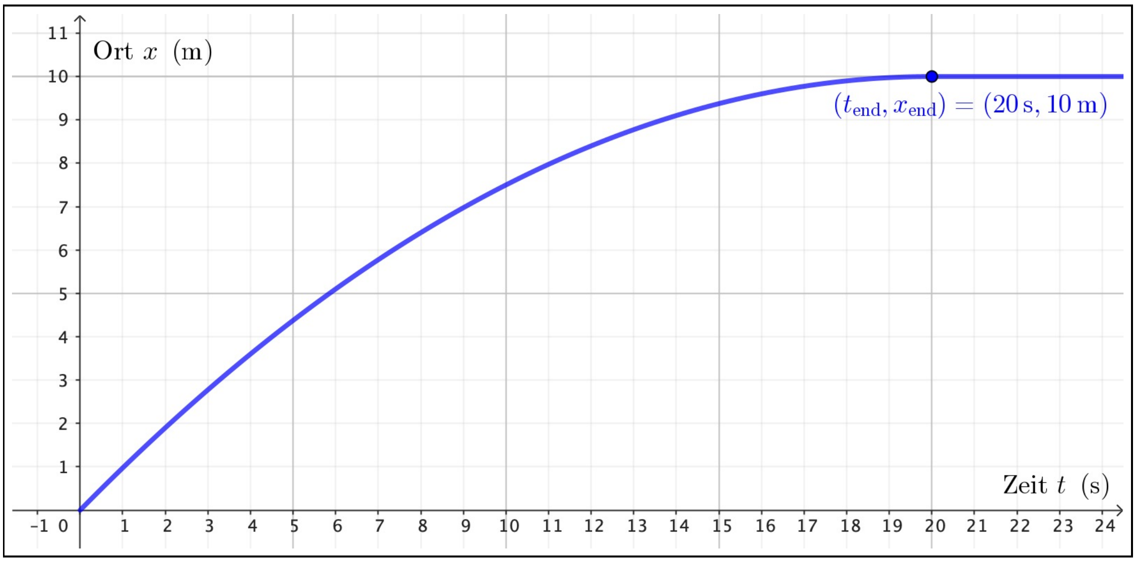
Und somit ergibt sich für den Ort des Stillstandes resp. für die zurückgelegte Strecke:

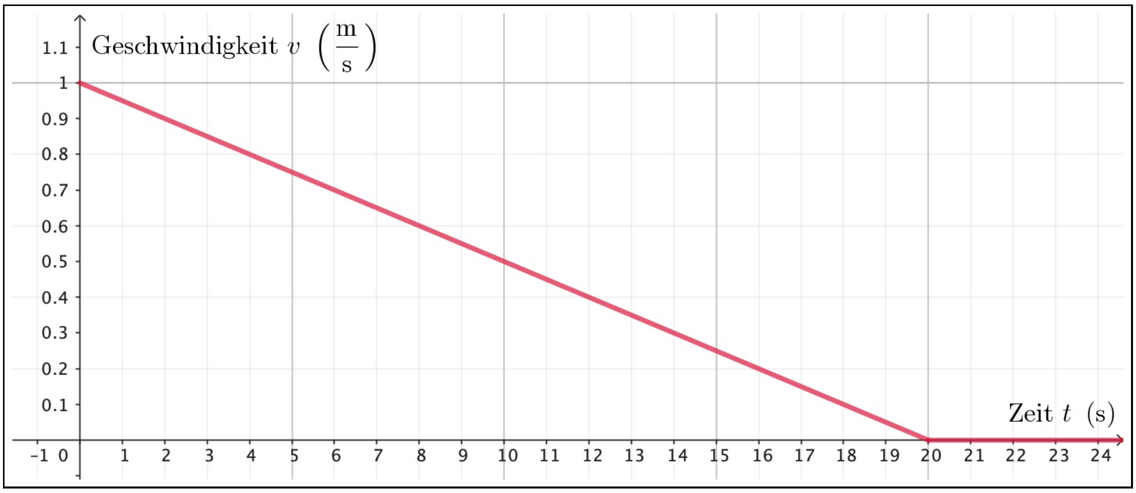
$$x_{\mathrm{end}}=x(t_{\mathrm{end}})=v_0\cdot\frac{v_0m}{\alpha}-\frac{\alpha}{2m}\left(\frac{v_0m}{\alpha}\right)^2=\frac{v_0^2m}{\alpha}-\frac{\alpha v_0^2m^2}{2m\alpha^2}=\frac{v_0^2m}{\alpha}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{v_0^2m}{2\alpha}$$

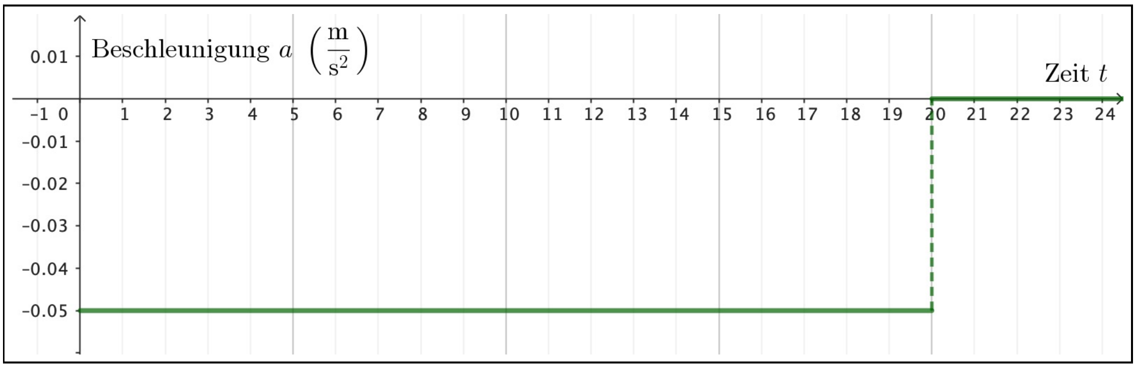
iv. Die zugehörigen Bewegungsdiagramme befinden sich oben auf der nächsten Seite.
Für die Dauer der Bremsung und die Bremsstrecke erhalten wir:

$$t_{\mathrm{end}}=\frac{v_0m}{\alpha}=\frac{1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 2\,\mathrm{kg}}{0.1\,\mathrm{N}}=20\,\mathrm{s}$$

$$x_{\mathrm{end}}=\frac{v_0^2m}{2\alpha}=\frac{\left(1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2\cdot 2\,\mathrm{kg}}{2\cdot 0.1\,\mathrm{N}}=10\,\mathrm{m}$$







(b) *Bremskraft proportional zu v (z.B. Wirbelstrombremsung)*

i. Erneut starten wir mit dem Ableiten des Funktionsansatzes:

$$x(t) = A + B\,e^{-\lambda t} \qquad \Rightarrow \qquad x'(t) = -\lambda B\,e^{-\lambda t} \qquad \Rightarrow \qquad x''(t) = \lambda^2 B\,e^{-\lambda t}$$

Einsetzen in die DGL liefert:

$$-\beta \cdot x'(t) = m \cdot x''(t) \quad \Rightarrow \quad -\beta \cdot (-\lambda B)\,e^{-\lambda t} = m \cdot \lambda^2 B\,e^{-\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \beta = m \cdot \lambda \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{\beta}{m}$$

Der Ansatz löst also diese lineare, homogene DGL 2. Ordnung (die Variable t fällt komplett raus), wenn für den Parameter λ gilt: $\lambda = \frac{\beta}{m}$.

ii. Die Parameter A und B werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt:

$$x'(0) = -\lambda B\, e^0 = -\lambda B \overset{!}{=} v_0 \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{v_0}{\lambda} = -\frac{v_0 m}{\beta}$$

$$x(0) = A + B\, e^0 = A + B \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad A = -B = \frac{v_0 m}{\beta}$$

Damit folgt für die eindeutige Funktion und ihre beiden Ableitungen:

$$x(t) = A + B\, e^{-\lambda t} = \frac{v_0 m}{\beta} - \frac{v_0 m}{\beta} \cdot e^{-\frac{\beta}{m} t} = \frac{v_0 m}{\beta} \left(1 - e^{-\frac{\beta}{m} t}\right)$$

$$x'(t) = -\lambda B\, e^{-\lambda t} = \frac{\beta}{m} \cdot \frac{v_0 m}{\beta} \cdot e^{-\frac{\beta}{m} t} = v_0\, e^{-\frac{\beta}{m} t}$$

$$x''(t) = \lambda^2 B\, e^{-\lambda t} = \left(\frac{\beta}{m}\right)^2 \cdot \left(-\frac{v_0 m}{\beta}\right) \cdot e^{-\frac{\beta}{m} t} = -\frac{v_0 \beta}{m} \cdot e^{-\frac{\beta}{m} t}$$

iii. Die Geschwindigkeit nimmt somit exponentiell ab. Daraus folgt für die Bremszeit t_{end}:

$$v(t_{\text{end}}) = v_0\, e^{-\frac{\beta}{m} t_{\text{end}}} \overset{!}{=} 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad e^{-\frac{\beta}{m} t_{\text{end}}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{hat keine Lösung!}$$

Diese Gleichung hat keine Lösung, denn die Exponentialfunktion nimmt niemals den Wert 0 an. Sie kommt dem Wert 0 für $t_{\text{end}} \to \infty$ nur beliebig nahe. Das führt uns zur komischen Aussage, dass der Wagen unendlich lange weiter rollt, also eigentlich nie zum Stillstand kommt.
Ergibt es dann überhaupt Sinn nach der Strecke bis zum Stillstand zu fragen? Müsste der Wagen jetzt nicht unendlich weit rollen? Die Antwort lautet: Nein! Für unsere Ortsfunktion ergibt sich nämlich im Limes für $t \to \infty$:

$$x_{\text{end}} = \lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{v_0 m}{\beta} \left(1 - e^{-\frac{\beta}{m} t}\right) = \frac{v_0 m}{\beta} \cdot (1 - 0) = \frac{v_0 m}{\beta}$$

D.h., der Wagen kommt dem Ort $x_{\text{end}} = \frac{v_0 m}{\beta}$ beliebig nahe!
In der Realität stimmt das ewige Weiterfahren natürlich nicht, denn es gibt erstens das perfekt reibungsfreie Rollen nicht, d.h., es käme noch eine Rollreibung vergleichbar mit derjenigen unter (a) hinzu. Aber selbst wenn es die perfekt reibungsfreie Rollbahn gäbe, würde die Exponentialfunktion $x(t)$ in nicht allzu langer Zeit so nahe an x_{end} heranrücken, dass der Unterschied zu x_{end}, also $\frac{v_0 m}{\beta} \cdot e^{-\frac{\beta}{m} t}$, unter eine Haarbreite fallen würde. In iv. rechne ich das mit den gegebenen Werten mal kurz durch.
Auf jeden Fall wäre die makroskopisch beobachtbare Bewegung sicher rasch zuende.

iv. Zunächst stellen wir fest, dass $x''(t)$ für $t = 0$ den Wert $-\frac{v_0 \beta}{m}$ ergibt. Daher muss dieser negative Bruch als Anfangsbeschleunigung aufgefasst werden. Zusammen mit $x_{\text{end}} = \frac{v_0 m}{\beta}$ können wir die Bewegungsfunktionen nochmals übersichtlich notieren:

$$x(t) = x_{\text{end}} - x_{\text{end}}\, e^{-\frac{\beta}{m} t} = x_{\text{end}} \left(1 - e^{-\frac{\beta}{m} t}\right) \qquad \text{mit} \quad x_{\text{end}} = \frac{v_0 m}{\beta}$$

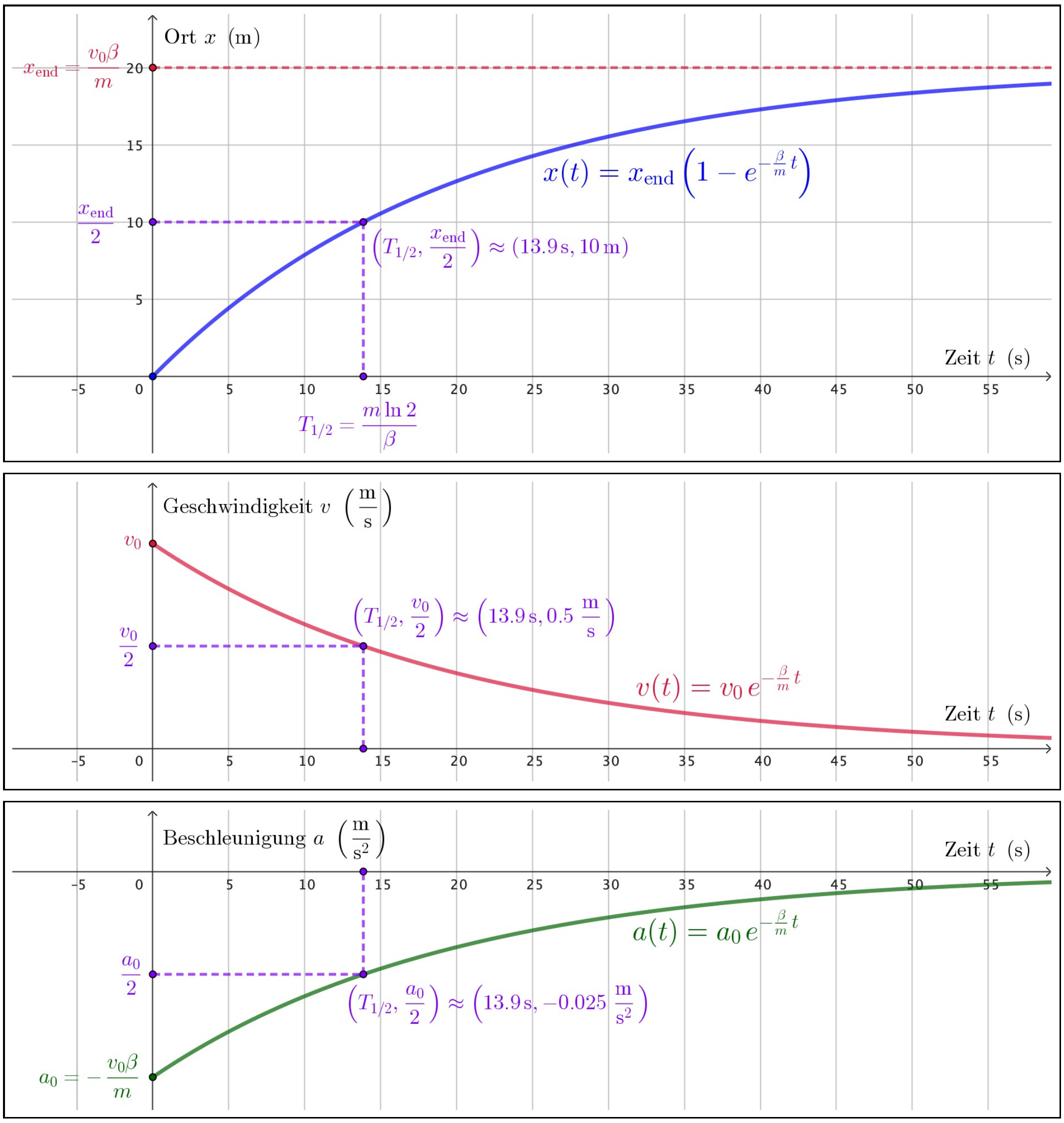
$$v(t) = x'(t) = v_0\, e^{-\frac{\beta}{m} t}$$

$$a(t) = x''(t) = a_0\, e^{-\frac{\beta}{m} t} \qquad \text{mit} \quad a_0 = -\frac{v_0 \beta}{m}$$

Wir setzen die gegebenen Werte ein und erhalten für x_{end} und a_0:

$$x_{\text{end}} = \frac{v_0 m}{\beta} = \frac{1\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2\,\text{kg}}{0.1\,\frac{\text{N}}{\text{m/s}}} = 20\,\text{m} \qquad \text{und} \qquad a_0 = -\frac{v_0 \beta}{m} = -\frac{1\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0.1\,\frac{\text{N}}{\text{m/s}}}{2\,\text{kg}} = -0.05\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Damit lassen sich die drei Bewegungsdiagramme bequem skizzieren (siehe nächste Seite).



Wie immer bei abnehmenden Exponentialfunktionen können wir die Halbwertzeit $T_{1/2}$ berechnen, die uns sofort ein besseres quantitatives Verständnis ermöglicht:

$$v(T_{1/2}) = v_0\, e^{-\frac{\beta}{m} T_{1/2}} \stackrel{!}{=} \frac{v_0}{2} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\frac{\beta}{m} T_{1/2}} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad T_{1/2} = \frac{m \ln 2}{\beta} = \frac{2\,\text{kg} \cdot \ln 2}{0.1\,\frac{\text{N}}{\text{m/s}}} \approx 13.9\,\text{s}$$

Nach etwa $14\,\text{s}$ ist die halbe Strecke bis x_{end} zurückgelegt und sowohl die Geschwindigkeit, als auch die Beschleunigung sind auf die Hälfte ihrer Anfangswerte gesunken.
Nun möchte ich noch beantwortet haben, nach welcher Zeit der Wagen nur noch eine bestimmte Länge d von x_{end} entfernt ist. Dafür folgt:

$$x_{\text{end}} - x(t) = x_{\text{end}}\, e^{-\frac{\beta}{m} t} \stackrel{!}{=} d \quad \Leftrightarrow \quad t = -\frac{m}{\beta} \cdot \ln \frac{d}{x_{\text{end}}} = \frac{m}{\beta} \cdot \ln \frac{x_{\text{end}}}{d}$$

Dabei habe ich ausgenutzt, dass $-\ln \frac{a}{b} = \ln \frac{b}{a}$ ist.
Bestimmen wir damit, nach welcher Zeit der Wagen nur noch eine typische Haardicke (ca. $75\,\mu\text{m}$) von x_{end} entfernt ist:

$$t_{\text{Haar}} = \frac{m}{\beta} \cdot \ln \frac{x_{\text{end}}}{d_{\text{Haar}}} = \frac{2\,\text{kg}}{0.1\,\frac{\text{N}}{\text{m/s}}} \cdot \ln \frac{20\,\text{m}}{0.000\,075\,\text{m}} \approx 250\,\text{s}$$

Makroskopisch hat der Wagen also nach etwa vier Minuten angehalten.

v. Wie wir schon längst herausgefunden haben, stehen $A = -B = \frac{v_0 m}{\beta} = x_{\text{end}}$ für die Endweite, der der Wagen für $t \to \infty$ unendlich nahe kommt.

3. *Horizontales "Federpendel" – die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators*

(a) Wir leiten den Funktionsansatz zweimal ab:

$$\begin{aligned} & x(t) = A\,\sin(\omega t) + B\,\cos(\omega t) \\ \Rightarrow\quad & x'(t) = A\omega\,\cos(\omega t) - B\omega\,\sin(\omega t) \\ \Rightarrow\quad & x''(t) = -A\omega^2\,\sin(\omega t) - B\omega^2\,\cos(\omega t) = -\omega^2\,\big(A\,\sin(\omega t) + B\,\cos(\omega t)\big) = -\omega^2 \cdot x(t) \end{aligned}$$

Damit wird sofort klar, dass dieser Ansatz die DGL erfüllt, falls die Kreisfrequenz ω einen bestimmten Wert hat:

$$x''(t) = -\omega^2\,x(t) \overset{!}{=} -\frac{D}{m}\,x(t) \quad\Rightarrow\quad \omega^2 = \frac{D}{m} \quad\Rightarrow\quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Die Differentialgleichung gibt somit den Zusammenhang zwischen der Masse m und der Federkonstanten D auf der einen und der Pendelfrequenz f resp. der Pendelperiode T auf der anderen Seite vor. Es ist:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad\Rightarrow\quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \quad\text{und}\quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}$$

Dass unser Funktionsansatz wirklich alle möglichen Lösungen der DGL abdeckt, also effektiv der allgemeinen Lösung entspricht, ergibt sich aus der Tatsache, dass es sich um eine lineare und homogene Differentialgleichung 2. Ordnung für $x(t)$ handelt. Die allgemeine Lösung muss folglich aus der Summe zweier linear unabhängiger Funktionen stehen, hier $\sin(\omega t)$ und $\cos(\omega t)$, die je mit einem Vorfaktor, bei uns A und B, versehen sind. Die Werte von A und B werden erst durch weitere Randbedingungen festgelegt, sodass schliesslich eine an das Problem angepasste und eindeutige Lösung entsteht.

(b) Wir setzen die Randbedingungen in $x(t)$ resp. $x'(t)$ ein und erhalten:

$$\left|\begin{array}{c} x(0) = A\,\sin 0 + B\,\cos 0 \overset{!}{=} x_0 \\ x'(0) = A\omega\,\cos 0 - B\omega\,\sin 0 \overset{!}{=} 0 \end{array}\right| \quad\Leftrightarrow\quad \left|\begin{array}{c} B = x_0 \\ A\omega = 0 \end{array}\right|$$

Aus der unteren Gleichung folgt mit $\omega \neq 0$, dass $A = 0$ sein muss. Somit ergibt sich als eindeutige Lösung die Ortsfunktion:

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t) \qquad \text{mit}\quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

(c) Wir benutzen die aus der DGL folgende Gleichung für die Kreisfrequenz ω:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{7.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}{0.5\,\mathrm{kg}}} = \sqrt{15\,\frac{1}{\mathrm{s}}} \approx 3.873\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

Die Einheit rad steht für eine Winkelangabe im Bogenmass. Bei ω handelt es sich nämlich um eine **Winkelgeschwindigkeit** (= Kreisfrequenz), also um eine Angabe, die die Veränderung eines Winkels pro Zeitspanne beschreibt. Nur so entsteht bei Multiplikation mit einer Zeit t im Argument der Sinus- oder der Cosinusfunktion tatsächlich ein Winkel.

Nun verwenden wir die Zusammenhänge zwischen der Kreisfrequenz ω und der Frequenz f resp. der Periode T, um letztere beiden Angaben zu bestimmen:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad\Rightarrow\quad T = \frac{2\pi}{\omega} \approx \frac{2\pi\,\mathrm{rad}}{3.873\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}} \approx 1.62\,\mathrm{s} \qquad \text{und} \qquad f = \frac{1}{T} \approx \frac{1}{1.62\,\mathrm{s}} \approx 0.616\,\mathrm{Hz}$$