Übungen zur Quantenphysik – Lösungen Serie 5

1. *Umrechnungen zwischen Summenschreibweise und Euler-Darstellung komplexer Zahlen*

   (a) i. $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\cdot\sin\varphi) = 2\cdot(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\cdot\sin\frac{\pi}{4}) = 2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,\mathrm{i}$

   ii. $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\cdot\sin\varphi) = 5\cdot(\cos\pi + \mathrm{i}\cdot\sin\pi) = 5\cdot(-1 + \mathrm{i}\cdot 0) = -5$

   iii. $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\cdot\sin\varphi) = \sqrt{3}\cdot\left(\cos(-\frac{\pi}{3}) + \mathrm{i}\cdot\sin(-\frac{\pi}{3})\right) = \sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\,\mathrm{i}$

   iv. $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\cdot\sin\varphi) = 6\cdot(\cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\cdot\sin\frac{3\pi}{2}) = 6\cdot(0 - \mathrm{i}\cdot 1) = -6\mathrm{i}$

   (b) Das Umwandeln in Polarkoordinaten ist ein wenig aufwändiger:

   i. $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$, $\varphi = \arctan\frac{-2}{2} = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ (4. Quadrant)
   $\Rightarrow z = 2\sqrt{2}\,e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

   ii. $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3^2+0^2} = 3$, $\varphi = \arctan\frac{0}{3} = \arctan 0 = 0$ (positive reelle Achse)
   $\Rightarrow z = 3\,e^{0} = 3$

   iii. $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{0^2+3^2} = 3$, $\varphi = \arctan\frac{-3}{0}$ ist undefiniert (negative imaginäre Achse)
   $\Rightarrow z = 3\,e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

   iv. $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2} = 4$, $\varphi = \arctan\frac{-2\sqrt{3}}{-2} - \pi = \arctan\sqrt{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$ (3. Quadrant)
   $\Rightarrow z = 4\,e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$

2. *Das Verständnis der komplexen Multiplikation und Division*

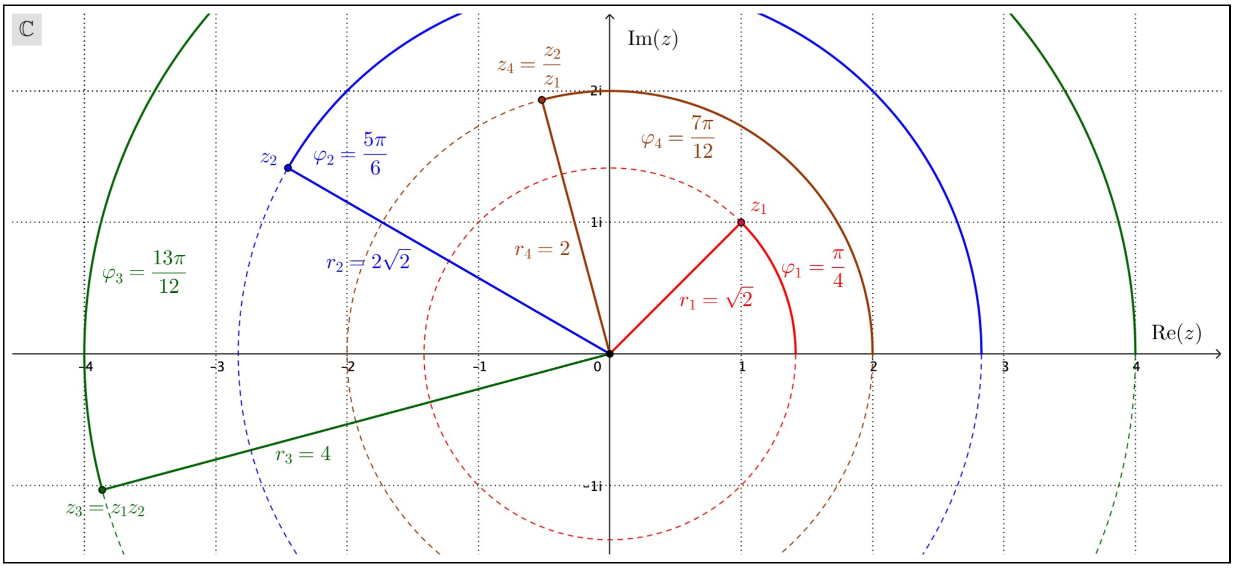
   (a) In kartesischen Koordinaten erhalten wir:

$$z_3 = z_1 z_2 = (1+\mathrm{i})\big(-\sqrt{6}+\sqrt{2}\,\mathrm{i}\big) = -\sqrt{6}+\sqrt{2}\,\mathrm{i}-\sqrt{6}\,\mathrm{i}-\sqrt{2} = -\sqrt{6}-\sqrt{2}+\mathrm{i}\big(\sqrt{2}-\sqrt{6}\big)$$

$$z_4 = \frac{z_2}{z_1} = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}\,\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\cdot\frac{1-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}\,\mathrm{i}+\sqrt{6}\,\mathrm{i}+\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$

   (b) Für das Eintragen der Punkte sind ungefähre Dezimalangaben für die kartesischen Koordinaten ganz hilfreich (wenn man die Darstellung nicht ohnehin mit GeoGebra anfertigt):

$$z_2 \approx -2.45 + 1.41\,\mathrm{i} \qquad z_3 = z_1 z_2 \approx -3.86 - 1.04\,\mathrm{i} \qquad z_4 = \frac{z_2}{z_1} \approx -0.52 + 1.93\,\mathrm{i}$$



(c) Die Umrechnung von z_1 fällt relativ leicht:

$$z_1 = 1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\, e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

Bei z_2 finden wir zunächst für den Betrag:

$$r_2 = \sqrt{6+2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Und für die Winkelkoordinate ergibt sich:

$$\varphi_2 = \arctan\frac{y_2}{x_2} + \pi = \arctan\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\right) + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6} \quad \text{(2. Quadrant)}$$

Somit schreiben wir für z_2:

$$z_2 = -\sqrt{6} + \sqrt{2}\,\mathrm{i} = 2\sqrt{2}\, e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$$

Mit diesen Euler-Darstellungen werden Multiplikation und Division dank der Potenzregeln sehr einfach:

$$z_3 = z_1 z_2 = \sqrt{2}\, e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \cdot 2\sqrt{2}\, e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} = 4\, e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{6}\right)} = 4\, e^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}$$

$$z_4 = \frac{z_2}{z_1} = \frac{2\sqrt{2}\, e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}}{\sqrt{2}\, e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} = 2\, e^{\mathrm{i}\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)} = 2\, e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$$

(d) Multiplikation und Division erzeugen je eine Drehstreckung in der komplexen Ebene:

- Wird z_2 mit $z_1 = r_1 e^{\mathrm{i}\varphi_1}$ multipliziert, so wird der zu z_2 gehörende Punkt mit Faktor r_1 vom Ursprung weggestreckt und anschliessend um den Winkel φ_1 gegen den Uhrzeigersinn gedreht.
- Wird z_2 durch $z_1 = r_1 e^{\mathrm{i}\varphi_1}$ dividiert, so wird der zu z_2 gehörende Punkt mit Faktor $\frac{1}{r_1}$ vom Ursprung weggestreckt und anschliessend um den Winkel φ_1 im Uhrzeigersinn gedreht.

(e) Wir können uns etwas plump von der besagten Gleichheit überzeugen, indem wir schauen, welche Dezimalzahlen der TR ausspuckt, wenn wir beispielsweise die kartesischen Koordinaten von $z_3 = z_1 z_2$ ausrechnen:

$$z_3 = 4e^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}} = 4\left(\cos\frac{13\pi}{12} + \mathrm{i}\cdot\sin\frac{13\pi}{12}\right) \approx -3.86 - 1.04\,\mathrm{i}$$

Das stimmt mit der Dezimalangabe für $z_1 z_2$ von weiter oben überein und funktioniert auch für $\frac{z_2}{z_1}$.

(f) Betrachten wir den Punkt $\frac{z_2}{z_1}$, so gilt offensichtlich die Gleichheit:

$$z_4 = \frac{z_2}{z_1} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} = 2e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}} = 2\left(\cos\frac{7\pi}{12} + \mathrm{i}\cdot\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

Wegen der Eindeutigkeit von Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl (Identifikationstrick) folgern wir aus dem Vergleich der Resultate von (a) und von (e):

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \qquad \text{und} \qquad \sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

Diese Identitäten kann man übrigens auch direkt aus den **Additionstheoremen** für die Sinus- und die Cosinusfunktion erhalten. Sie lauten:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \qquad \text{und} \qquad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

Damit finden wir sofort:

$$\sin\frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

3. *Zwei kompliziertere Trainingsdifferentialgleichungen*

(a) Mittels Produkt- und Kettenregel leiten wir den Funktionsansatz ab:

$$f(x) = -x\ln(Cx-1)$$
$$f'(x) = -\ln(Cx-1) - x\cdot\frac{1}{Cx-1}\cdot C = -\ln(Cx-1) - \frac{Cx}{Cx-1}$$

Nun überprüfen wir die Richtigkeit des Funktionsansatzes durch Einsetzen in die DGL:

$$\begin{aligned} xf'(x) - f(x) + x\,e^{\frac{f(x)}{x}} &= x\cdot\left(-\ln(Cx-1) - \frac{Cx}{Cx-1}\right) + x\ln(Cx-1) + x\,e^{\frac{-x\ln(Cx-1)}{x}} \\ &= -x\ln(Cx-1) - \frac{Cx^2}{Cx-1} + x\ln(Cx-1) + x\,e^{-\ln(Cx-1)} = -\frac{Cx^2}{Cx-1} + x\,e^{\ln\frac{1}{Cx-1}} \\ &= -\frac{Cx^2}{Cx-1} + \frac{x}{Cx-1} = \frac{-Cx^2+x}{Cx-1} = \frac{-x(Cx-1)}{Cx-1} = -x \end{aligned}$$

Damit ergibt die linke Seite der DGL für jedes beliebige x also genau das, was die rechte Seite gefordert hat, nämlich $-x$. Die DGL ist folglich erfüllt!
Wir setzen die Randbedingung ein, um den Parameter C eindeutig festzulegen:

$$f(5) = -5\ln(5C-1) \overset{!}{=} 0 \quad\Leftrightarrow\quad \ln(5C-1) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 5C-1 = e^0 = 1 \quad\Leftrightarrow\quad C = \frac{2}{5}$$

Für die eindeutige Funktion erhalten wir somit insgesamt:

$$f(x) = -x\ln\left(\frac{2x}{5} - 1\right)$$

(b) Auch hier starten wir mit dem Ableiten des Funktionsansatzes:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{Ax+B}{e^{\sqrt{3}x}} \\ f'(x) &= \frac{A\cdot e^{\sqrt{3}x} - (Ax+B)\cdot e^{\sqrt{3}x}\cdot\sqrt{3}}{(e^{\sqrt{3}x})^2} = \frac{A-(Ax+B)\cdot\sqrt{3}}{e^{\sqrt{3}x}} = \frac{A - B\sqrt{3} - A\sqrt{3}\,x}{e^{\sqrt{3}x}} \\ f''(x) &= \frac{-A\sqrt{3}\cdot e^{\sqrt{3}x} - (A - B\sqrt{3} - A\sqrt{3}\,x)\cdot e^{\sqrt{3}x}\cdot\sqrt{3}}{(e^{\sqrt{3}x})^2} = \frac{-A\sqrt{3} - (A - B\sqrt{3} - A\sqrt{3}\,x)\cdot\sqrt{3}}{e^{\sqrt{3}x}} \\ &= \frac{-2A\sqrt{3} + 3B + 3Ax}{e^{\sqrt{3}x}} \end{aligned}$$

Diese Ableitungen setzen wir in die linke Seite der DGL ein:

$$\begin{aligned} f''(x) + 2\sqrt{3}\,f'(x) + 3f(x) &= \frac{-2A\sqrt{3} + 3B + 3Ax}{e^{\sqrt{3}x}} + 2\sqrt{3}\cdot\frac{A - B\sqrt{3} - A\sqrt{3}\,x}{e^{\sqrt{3}x}} + 3\cdot\frac{Ax+B}{e^{\sqrt{3}x}} \\ &= \frac{1}{e^{\sqrt{3}x}}\cdot\Big(-2A\sqrt{3} + 3B + 3Ax + 2A\sqrt{3} - 6B - 6Ax + 3Ax + 3B\Big) = 0 \end{aligned}$$

Das ist genau das von der rechten Seite der DGL geforderte Resultat! Unser Ansatz stimmt.
Aus den beiden Randbedingungen erhalten wir zwei Gleichungen für die Parameter A und B:

$$\left|\begin{array}{c} f(0) = \sqrt{3} \\ f'(0) = 0 \end{array}\right| \quad\Rightarrow\quad \left|\begin{array}{c} \frac{0+B}{e^0} = \sqrt{3} \\ \frac{A - B\sqrt{3} - 0}{e^0} = 0 \end{array}\right| \quad\Rightarrow\quad \left|\begin{array}{c} B = \sqrt{3} \\ A - B\sqrt{3} = 0 \end{array}\right| \quad\Rightarrow\quad A = 3$$

Somit lautet die eindeutige Lösung der DGL:

$$f(x) = \frac{3x+\sqrt{3}}{e^{\sqrt{3}x}}$$

4. *Hermitesche Polynome $H_n(x)$ und die Rodrigues-Formel*

(a) Für die ersten fünf Hermiteschen Polynome erhalten wir aus der Rodrigues-Formel:

$$H_0(x) = 1 \qquad H_1(x) = 2x \qquad H_2(x) = 4x^2 - 2$$
$$H_3(x) = 8x^3 - 12x \qquad H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

Hier die ausführliche Berechnung von $H_4(x)$:

$$\begin{aligned} H_4(x) &= (-1)^4\, e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}x^4}\, e^{-x^2} = e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3} \Big(-2x\, e^{-x^2} \Big) = e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \Big(-2\, e^{-x^2} + 4x^2\, e^{-x^2} \Big) \\ &= e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \Big(\big(-2 + 4x^2\big)\, e^{-x^2} \Big) = e^{x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \Big(8x\, e^{-x^2} + \big(4x - 8x^3\big)\, e^{-x^2} \Big) \\ &= e^{x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \Big(\big(12x - 8x^3\big)\, e^{-x^2} \Big) = e^{x^2} \Big(\big(12 - 24x^2\big)\, e^{-x^2} + \big(-24x^2 + 16x^4\big)\, e^{-x^2} \Big) \\ &= e^{x^2} \big(12 - 24x^2 - 24x^2 + 16x^4\big)\, e^{-x^2} = 16x^4 - 48x^2 + 12 \end{aligned}$$

(b) Offenbar ist x^n die höchste Potenz im n-ten hermiteschen Polynom und der Vorfaktor ist die n-te Potenz von 2:

$$H_n(x) = 2^n x^n + \ldots$$

(c) Ist n gerade, so sind im zugehörigen hermiteschen Polynom $H_n(x)$ auch nur gerade Potenzen von x enthalten. Dazu gehört als kleinste Potenz auch $x^0 = 1$, also der konstante Term. Man nennt ein solches Polynom dann insgesamt **gerade** und sein Graph zeigt eine Achsensymmetrie bezüglich der y-Achse.
$H_{20}(x)$ enthält somit die Potenzen 1, x^2, x^4, $\ldots$, x^{20}.
Umgekehrt sind in $H_n(x)$ bei ungeradem n ausschliesslich ungerade Potenzen von x vorhanden. Solche Polynome nennt man **ungerade** und der Graph zeigt eine Punktsymmetrie bezüglich des Ursprungs.
$H_{21}(x)$ enthält somit die Potenzen x, x^3, x^5, $\ldots$, x^{21}.

(d) Wir überprüfen:

Allgemein: $\quad H_n''(x) - 2x\, H_n'(x) + 2n\, H_n(x) = 0$

$n = 0: \quad 0 - 2x \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0 \quad \checkmark$

$n = 1: \quad 0 - 2x \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 2x = 0 \quad \checkmark$

$n = 2: \quad 8 - 2x \cdot 8x + 2 \cdot 2 \cdot (4x^2 - 2) = 0 \quad \checkmark$

$n = 3: \quad 48x - 2x \cdot (24x^2 - 12) + 2 \cdot 3 \cdot (8x^3 - 12x) = 0 \quad \checkmark$

$n = 4: \quad 192x^2 - 96 - 2x \cdot (64x^3 - 96x) + 2 \cdot 4 \cdot (16x^4 - 48x^2 + 12) = 0 \quad \checkmark$

(e) Wir testen ebenso:

Allgemein: $\quad \dfrac{\mathrm{d}H_n(x)}{\mathrm{d}x} = 2n\, H_{n-1}(x)$

$n = 4: \quad \dfrac{\mathrm{d}H_4(x)}{\mathrm{d}x} = 64x^3 - 96x = 8(8x^3 - 12x) = 2 \cdot 4 \cdot H_3(x) \quad \checkmark$

$n = 3: \quad \dfrac{\mathrm{d}H_3(x)}{\mathrm{d}x} = 24x^2 - 12 = 6(4x^2 - 2) = 2 \cdot 3 \cdot H_2(x) \quad \checkmark$

$n = 2: \quad \dfrac{\mathrm{d}H_2(x)}{\mathrm{d}x} = 8x = 4 \cdot 2x = 2 \cdot 2 \cdot H_1(x) \quad \checkmark$

$n = 1: \quad \dfrac{\mathrm{d}H_1(x)}{\mathrm{d}x} = 2 = 2 \cdot 1 = 2 \cdot 1 \cdot H_0(x) \quad \checkmark$