Übungen zur Quantenphysik – Lösungen Serie 7 (Prüfungsvorbereitung)

1. Es handelt sich um lauter quadratische Gleichungen. Somit gibt es stets zwei Lösungen, die allenfalls zu einer Lösung zusammenfallen. Auf jeden Fall gibt es nie mehr als zwei Lösungen!

   (a) $z^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad (z+2)(z-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{L} = \{\pm 2\}$

   (b) $z^2 = -3 \quad \Leftrightarrow \quad \left(z + \sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)\left(z - \sqrt{3}\,\mathrm{i}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{L} = \left\{\pm\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right\}$

   (c) $z^2 - 3z + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z-1)(z-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{L} = \{1, 2\}$

   (d) $2z^2 + 32 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2(z+4\mathrm{i})(z-4\mathrm{i}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{L} = \{\pm 4\mathrm{i}\}$

   (e) $z^2 + 4z + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z_{1/2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = -2 \pm \mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{L} = \{-2 \pm \mathrm{i}\}$

   (f) $z^2 + 4z - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z+5)(z-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{L} = \{-5, 1\}$

2. Man betrachte die Zahlenmengen auf S.4 im Skript zu den komplexen Zahlen!

   (a) 2 ist eine reelle Zahl. $\Rightarrow$ Wahr!

   (b) 2 ist eine komplexe Zahl. $\Rightarrow$ Wahr!

   (c) $\sqrt{3}$ ist eine rationale Zahl. $\Rightarrow$ Falsch!

   (d) π ist eine komplexe Zahl. $\Rightarrow$ Wahr!

   (e) $-\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ ist eine rein imaginäre Zahl. $\Rightarrow$ Wahr!

   (f) $3 + \frac{\mathrm{i}}{2}$ ist eine imaginäre Zahl. $\Rightarrow$ Falsch!

3. Stets gilt: $\mathrm{i}^2 = -1$.

   Reminder zum Bruchrechnen: Ist z_2 im Nenner von $\frac{z_1}{z_2}$ eine komplexe Zahl, so kann dieser Nenner zu einer reellen Zahl umgewandelt werden, indem man mit dem komplex Konjugierten z_2^* erweitert!

   (a) $(11 - 15\mathrm{i})(-3 + 8\mathrm{i}) = -33 + 88\mathrm{i} + 45\mathrm{i} + 120 = 87 + 133\mathrm{i}$

   (b) $(13 + 17\mathrm{i})(13 - 17\mathrm{i}) = 13^2 - (17\mathrm{i})^2 = 169 + 289 = 458$

   (c) $(7 + i)^2 = 49 + 14\mathrm{i} - 1 = 48 + 14\mathrm{i}$

   (d) $\dfrac{15\mathrm{i} - 12}{-6i} = \dfrac{15\mathrm{i} - 12}{-6\mathrm{i}} \cdot \dfrac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}} = \dfrac{-15 - 12\mathrm{i}}{6} = -\dfrac{5}{2} - 2\mathrm{i}$

   (e) $\dfrac{63 + 16\mathrm{i}}{4 + 3\mathrm{i}} = \dfrac{63 + 16\mathrm{i}}{4 + 3\mathrm{i}} \cdot \dfrac{4 - 3\mathrm{i}}{4 - 3\mathrm{i}} = \dfrac{252 - 189\mathrm{i} + 64\mathrm{i} + 48}{16 + 9} = \dfrac{300 - 125\mathrm{i}}{25} = 12 - 5\mathrm{i}$

   (f) $\dfrac{\frac{2}{3} + \frac{5}{6}\mathrm{i}}{\frac{1}{2} + \frac{7}{3}\mathrm{i}} = \dfrac{4 + 5\mathrm{i}}{3 + 14\mathrm{i}} \cdot \dfrac{3 - 14\mathrm{i}}{3 - 14\mathrm{i}} = \dfrac{12 - 56\mathrm{i} + 15\mathrm{i} + 70}{9 + 196} = \dfrac{82 - 41\mathrm{i}}{205} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}\,\mathrm{i}$

   (g) $\dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{2}\,\mathrm{i}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}\,\mathrm{i}} = \dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{2}\,\mathrm{i}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}\,\mathrm{i}} \cdot \dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{2}\,\mathrm{i}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}\,\mathrm{i}} = \dfrac{3 + 2\sqrt{6}\,\mathrm{i} - 2}{3 + 2} = \dfrac{1 + 2\sqrt{6}\,\mathrm{i}}{5} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{2\sqrt{6}}{5}\,\mathrm{i}$

4. Es muss jeweils einmal "aufgeleitet" werden. In der Stammfunktion muss stets eine Integrationskonstante C addiert werden, mit deren Hilfe dann die Randbedingung erfüllt werden kann:

   (a) $f'(x) = 6x^2 + 12x \quad \Rightarrow \quad f(x) = 2x^3 + 6x^2 + C$

   $$\Rightarrow \quad f(-2) = 2(-2)^3 + 6(-2)^2 + C = 8 + C \overset{!}{=} 6 \quad \Rightarrow \quad C = -2 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 2$$

   (b) $f'(x) = \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{4}{x^3} \quad \Rightarrow \quad f(x) = -\dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{x^2} + C$

   $$\Rightarrow \quad f(-2) = -\frac{3}{-2} - \frac{2}{(-2)^2} + C = 1 + C \overset{!}{=} \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad f(x) = -\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{2}$$

   (c) $f'(x) = -6\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f(x) = -4\sqrt{x^3} + C = -4x\sqrt{x} + C$

   $$\Rightarrow \quad f(2) = -4 \cdot 2\sqrt{2} + C = -8\sqrt{2} + C \overset{!}{=} \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad C = 9\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad f(x) = -4x\sqrt{x} + 9\sqrt{2}$$

   (d) $f'(x) = \dfrac{1}{x} - e^x \quad \Rightarrow \quad f(x) = \ln|x| - e^x + C$

   $$\Rightarrow \quad f(1) = \ln|1| - e^1 + C = -e + C \overset{!}{=} 2e \quad \Rightarrow \quad C = 3e \quad \Rightarrow \quad f(x) = \ln|x| - e^x + 3e$$

5. Für das Negative $-z$, das komplex Konjugierte z^*, den Betrag $|z|$ und den Kehrwert z^{-1} ergibt sich:

   (a) $z = -3 + 4\,\mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad -z = 3 - 4\mathrm{i} \qquad |z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \qquad z^* = -3 - 4\mathrm{i}$

   $$z^{-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{z^*}{z^*} = \frac{z^*}{|z|^2} = -\frac{3}{25} - \frac{4}{25}\mathrm{i}$$

   (b) $z = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad -z = -\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3}\,\mathrm{i} \qquad z^* = \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3}\,\mathrm{i} \qquad |z| = \sqrt{\dfrac{1}{9} + \dfrac{4}{9}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

   $$z^{-1} = \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\,\mathrm{i}}{\frac{5}{9}} = \frac{3}{5} - \frac{6}{5}\,\mathrm{i}$$

   (c) $z = -\dfrac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad -z = \dfrac{3}{2} \qquad z^* = z = -\dfrac{3}{2} \qquad |z| = \dfrac{3}{2} \qquad z^{-1} = \dfrac{1}{z} = -\dfrac{2}{3}$

   (d) $z = \dfrac{5}{3}\,\mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad -z = -\dfrac{5}{3}\,\mathrm{i} \qquad z^* = -z = -\dfrac{5}{3}\,\mathrm{i} \qquad |z| = \dfrac{5}{3} \qquad z^{-1} = \dfrac{3}{5\mathrm{i}} \cdot \dfrac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}} = -\dfrac{3}{5}\,\mathrm{i}$

6. Wir benötigen die Binomialkoeffizienten aus dem Pascal'schen Dreieck, also $\binom{n}{k}$, und bemerken zudem: Die Potenzen von i sind $\mathrm{i}^2 = -1$, $\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$, $\mathrm{i}^4 = 1$, $\mathrm{i}^5 = \mathrm{i}$, $\mathrm{i}^6 = -1$, etc. Die ungeraden Potenzen von i sind also imaginär, die geraden Potenzen sind hingegen reell.

   (a)
   $$\big(-2 - 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}\big)^4 = (-2)^4\big(1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}\big)^4 = 16\big(1 + 4\sqrt{3}\,\mathrm{i} + 6 \cdot 3\mathrm{i}^2 + 4 \cdot 3\sqrt{3}\,\mathrm{i}^3 + 9\mathrm{i}^4\big)$$
   $$= 16\big(1 + 4\sqrt{3}\,\mathrm{i} - 18 - 12\sqrt{3}\,\mathrm{i} + 9\big) = 16\big(-8 - 8\sqrt{3}\,\mathrm{i}\big) = -128 - 128\sqrt{3}\,\mathrm{i}$$

   (b) $\mathrm{Im}\big((3\mathrm{i} - 2)^3\big) = \mathrm{Im}\big(27\mathrm{i}^3 - 3 \cdot 9\mathrm{i}^2 \cdot 2 + 3 \cdot 3\mathrm{i} \cdot 4 - 8\big) = \mathrm{Im}\big(-27\mathrm{i} + 36\mathrm{i}\big) = 9$

   (c)
   $$\mathrm{Re}\left(\left(\frac{1}{3} - 3\mathrm{i}\right)^3\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{27} - 3 \cdot \frac{1}{9} \cdot 3\mathrm{i} + 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 9\mathrm{i}^2 - 27\mathrm{i}^3\right) = \frac{1}{27} - 9 = -\frac{242}{27}$$

7. (a) Hier können wir ganz direkt nach z auflösen:

$$\begin{aligned}
&& \frac{(1+2\mathrm{i})z+2-3\mathrm{i}}{(5+\mathrm{i})z+27-20i} &= -6 && \Big| \cdot \big((5+\mathrm{i})z+27-20\mathrm{i}\big) \\
&\Rightarrow & (1+2\mathrm{i})z+2-3\mathrm{i} &= -6(5+\mathrm{i})z-162+120\mathrm{i} && \Big|\,\text{ausmultiplizieren} \\
&\Leftrightarrow & z+2\mathrm{i}z+2-3\mathrm{i} &= -30z-6\mathrm{i}z-162+120\mathrm{i} && \Big|\,\text{separieren} \\
&\Leftrightarrow & 31z+8\mathrm{i}z &= -164+123\mathrm{i} && \Big|\,\text{ausklammern} \\
&\Leftrightarrow & (31+8\mathrm{i})z &= -164+123\mathrm{i} && \Big|\,:(31+8\mathrm{i}) \\
&\Leftrightarrow & z &= \frac{-164+123\mathrm{i}}{31+8\mathrm{i}}
\end{aligned}$$

Das Endresultat berechnen wir durch Ausführung der Division. Dabei empfiehlt sich unbedingt vorab die Zahl 41 aus dem Zähler auszuklammern:

$$\begin{aligned}
z &= \frac{-164+123\mathrm{i}}{31+8\mathrm{i}} = 41\cdot\frac{-4+3\mathrm{i}}{31+8\mathrm{i}}\cdot\frac{31-8\mathrm{i}}{31-8\mathrm{i}} = 41\cdot\frac{-124+32\mathrm{i}+93\mathrm{i}+24}{961+64} \\
&= 41\cdot\frac{-100+125\mathrm{i}}{1025} = 41\cdot\frac{25(-4+5\mathrm{i})}{41\cdot 25} = -4+5\mathrm{i}
\end{aligned}$$

(b) Man sieht, dass sich auf der linken Seite $(4+2\mathrm{i})$ ausklammern lässt:

$$\begin{aligned}
&& (z+5\mathrm{i})(4+2\mathrm{i})-(z+2)(4+2\mathrm{i}) &= 24+2\mathrm{i} && \Big|\,(4+2\mathrm{i})\ \text{ausklammern} \\
&\Rightarrow & (4+2\mathrm{i})\big(z+5\mathrm{i}-(z+2)\big) &= 24+2\mathrm{i} && \Big|\,\text{zusammenfassen} \\
&\Leftrightarrow & (4+2\mathrm{i})(5\mathrm{i}-2) &= 24+2\mathrm{i} && \Big|\,\text{ausmultiplizieren} \\
&\Leftrightarrow & 20\mathrm{i}-8-10-4\mathrm{i} &= 24+2\mathrm{i} && \Big|\,\text{zusammenfassen} \\
&\Leftrightarrow & 16\mathrm{i}-18 &= 24+2\mathrm{i}
\end{aligned}$$

Auf beiden Seiten dieser Gleichung steht nun eine komplexe Zahl. Aber die beiden Zahlen sind offensichtlich nicht dieselben und hängen auch gar nicht mehr von der Unbekannten z ab. Das bedeutet, egal wie z gewählt wird, die Gleichung stimmt nicht. Somit schließen wir: $\mathbb{L}=\{\}$.

(c) Aufgrund des komplex Konjugierten z^* schreiben wir hier $z=x+y\mathrm{i}$ resp. $z^*=x-y\mathrm{i}$:

$$\begin{aligned}
&& (1+\mathrm{i})z+(5-3\mathrm{i})z^* &= 20+20\mathrm{i} && \Big|\,z=x+y\mathrm{i}\ \text{und}\ z^*=x-y\mathrm{i} \\
&\Rightarrow & (1+\mathrm{i})(x+y\mathrm{i})+(5-3\mathrm{i})(x-y\mathrm{i}) &= 20+20\mathrm{i} && \Big|\,\text{ausmultiplizieren} \\
&\Leftrightarrow & x+y\mathrm{i}+x\mathrm{i}-y+5x-5y\mathrm{i}-3x\mathrm{i}-3y &= 20+20\mathrm{i} && \Big|\,\text{zusammenfassen und sortieren} \\
&\Leftrightarrow & 6x-4y+(-2x-4y)\mathrm{i} &= 20+20\mathrm{i} && \Big|\,:2 \\
&\Leftrightarrow & 3x-2y+(-x-2y)\mathrm{i} &= 10+10\mathrm{i} && \Big|\,:2
\end{aligned}$$

Nun identifizieren wir die Real- und Imaginärteile auf beiden Gleichungsseiten miteinander und erhalten so ein Gleichungssystem für x und y:

$$\left|\begin{array}{l} 3x-2y=10 \\ -x-2y=10 \end{array}\right| \begin{array}{l} ① \\ ② \end{array} \quad \Rightarrow \quad ①\text{ - }②\text{:}\quad 4x=0$$

$$\Leftrightarrow \quad x=0 \quad \Rightarrow \quad \text{in ①:}\quad 0-2y=10 \quad \Leftrightarrow \quad y=-5$$

Somit haben wir gefunden: $z=-5\mathrm{i}$.

8. Wir lösen diese Gleichungssysteme, wie wir das von reellen Gleichungen gewohnt sind.

   (a) Wir verwenden z.B. das Additionsverfahren:

$$\left| \begin{array}{c} \mathrm{i}z_1 - 5z_2 = 13 \\ 2z_1 - 3\mathrm{i}z_2 = 13\mathrm{i} \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} 2\mathrm{i}z_1 - 10z_2 = 26 \\ 2\mathrm{i}z_1 + 3z_2 = -13 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad 3z_2 + 10z_2 = -13 - 26$$

$$\Leftrightarrow \quad 13z_2 = -39 \quad \Leftrightarrow \quad z_2 = -3 \quad \Rightarrow \quad \text{in obere Gleichung:} \quad \mathrm{i}z_1 - 5(-3) = 13$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{i}z_1 + 15 = 13 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{i}z_1 = -2 \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = \frac{-2}{\mathrm{i}} = 2\mathrm{i}$$

   Damit haben wir also Lösung das Paar $(z_1, z_2) = (2\mathrm{i}, -3)$ erhalten.

   (b) Auch in diesem Fall hilft das Additionsverfahren. Die obere Gleichung kann z.B. mit 3 und die untere mit $(1 - \mathrm{i})$ multipliziert werden:

$$\left| \begin{array}{c} (1+\mathrm{i})z_1 + (1-\mathrm{i})z_2 = 2 - 2\mathrm{i} \\ (2-3\mathrm{i})z_1 - 3z_2 = 5 + 6i \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} 3(1+\mathrm{i})z_1 + 3(1-\mathrm{i})z_2 = 3(2-2\mathrm{i}) \\ (2-3\mathrm{i})(1-\mathrm{i})z_1 - 3(1-\mathrm{i})z_2 = (5+6\mathrm{i})(1-\mathrm{i}) \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad 3(1+\mathrm{i})z_1 + (2-3\mathrm{i})(1-\mathrm{i})z_1 = 3(2-2\mathrm{i}) + (5+6\mathrm{i})(1-\mathrm{i}) \\
&\Leftrightarrow \quad \big(3(1+\mathrm{i}) + (2-3\mathrm{i})(1-\mathrm{i})\big)z_1 = 3(2-2\mathrm{i}) + (5+6\mathrm{i})(1-\mathrm{i}) \\
&\Leftrightarrow \quad (3 + 3\mathrm{i} + 2 - 2\mathrm{i} - 3\mathrm{i} - 3)z_1 = 6 - 6\mathrm{i} + 5 - 5\mathrm{i} + 6\mathrm{i} + 6 \\
&\Leftrightarrow \quad (2 - 2\mathrm{i})z_1 = 17 - 5\mathrm{i} \\
&\Leftrightarrow \quad z_1 = \frac{17-5\mathrm{i}}{2-2\mathrm{i}} \cdot \frac{2+2\mathrm{i}}{2+2\mathrm{i}} = \frac{34 + 34\mathrm{i} - 10\mathrm{i} + 10}{4+4} = \frac{44+24\mathrm{i}}{8} = \frac{11}{2} + 3\mathrm{i}
\end{aligned}$$

   Dieses z_1 setzen wir z.B. in untere der beiden anfänglichen Gleichungen ein:

$$(2-3\mathrm{i})\left(\frac{11}{2} + 3\mathrm{i}\right) - 3z_2 = 5 + 6\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad 11 + 6\mathrm{i} - \frac{33}{2}\mathrm{i} + 9 - 3z_2 = 5 + 6\mathrm{i}$$

$$\Leftrightarrow \quad -3z_2 = 5 + 6\mathrm{i} - 11 - 6\mathrm{i} + \frac{33}{2}\mathrm{i} - 9 = -15 + \frac{33}{2}\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad z_2 = 5 - \frac{11}{2}\mathrm{i}$$

$$\Rightarrow \quad (z_1, z_2) = \left(\frac{11}{2} + 3\mathrm{i}, 5 - \frac{11}{2}\mathrm{i}\right)$$

9. (a) Ist bei einer komplexen Zahl $z = x + y\mathrm{i}$ das komplex Konjugierte $z^* = x - y\mathrm{i}$ gleich der Zahl selber, so muss $y = 0$ sein. D.h., solche Zahlen haben keinen Imaginärteil. Somit sind alle reellen Zahlen Lösungen dieser Gleichung, $\mathbb{L} = \{z = x + y\mathrm{i} \in \mathbb{C} \,|\, y = 0\} = \mathbb{R}$.

   (b) Diese Gleichung gilt auch im Komplexen nur für die Zahl 0, denn es muss $-z = -x - y\mathrm{i} = x + y\mathrm{i}$ sein, also $-x = x$ und $-y = y$.

   (c) Dies ist eine quadratische Gleichung für z, die auch im Komplexen maximal zwei Lösungen haben kann, wie wir durch Umstellung und Faktorisierung zeigen können:

$$z^{-1} = z \quad \Leftrightarrow \quad 1 = z^2 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z+1)(z-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \pm 1$$

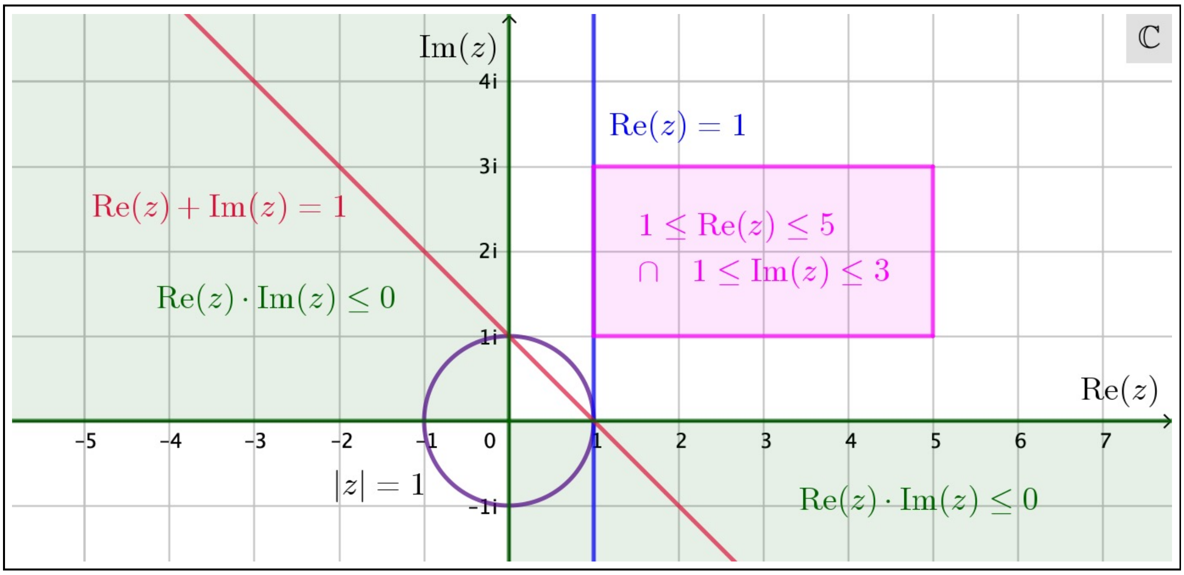
   (d) Wir benutzen die Summenschreibweise $z = x + y\mathrm{i}$, um Klarheit zu erhalten:

$$-z^* = (-z)^* \quad \Leftrightarrow \quad -(x - y\mathrm{i}) = (-x - y\mathrm{i})^* \quad \Leftrightarrow \quad -x + y\mathrm{i} = -x + y\mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L} = \mathbb{C}$$

   Tatsächlich erfüllt jede beliebige komplexe Zahl diese Gleichung.

   (e) Auch diese Gleichung ist ebenfalls für jede beliebige Zahl $z \in \mathbb{C}$ erfüllt, denn wenn wir in $z = x + y\mathrm{i}$ nur das Vorzeichen des Imaginärteils ändern, es danach aber nur auf den Realteil ankommt, dann ist dieser eben immer noch derselbe: $\mathbb{L} = \mathbb{C}$.

10. Zu den Mengen gehören die folgenden Kurven und Flächen:



11. Die Veränderung $\mathrm{d}N$ ist proportional zur Funktion N selber. Das bedeutet, wir haben es mit einer Exponentialfunktion zu tun und setzen an:
$$N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$$
Einmaliges Ableiten zeigt, dass dies korrekt ist so:
$$N'(t) = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \lambda \cdot N_0 \cdot e^{\lambda t} = \lambda \cdot N(t) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}N = \lambda \cdot N \cdot \mathrm{d}t$$
Für die Verdoppelungszeit T_2 gilt:
$$N(T_2) = N_0 \cdot e^{\lambda T_2} \overset{!}{=} 2N_0 \quad \Rightarrow \quad e^{\lambda T_2} = 2 \quad \Rightarrow \quad \lambda T_2 = \ln 2 \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{\ln 2}{\lambda}$$
Klar: Je größer die Infektionswahrscheinlichkeit, desto geringer wird die Verdoppelungszeit.

12. Die Umrechnung in kartesische Koordinaten ist dank der Euler-Formel sehr einfach:

(a) $2\,e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \sqrt{3} + \mathrm{i}$

(b) $3\sqrt{2}\,e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} = 3\sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2} \cdot \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) = -3 + 3\mathrm{i}$

(c) $6\sqrt{2}\,e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}} = 6\sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 6\sqrt{2} \cdot \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) = -6 - 6\mathrm{i}$

(d) $3\,e^{-\mathrm{i}\frac{13\pi}{2}} = 3\left(\cos\left(-\frac{13\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{13\pi}{2}\right)\right) = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 3(0 - \mathrm{i}) = -3\mathrm{i}$

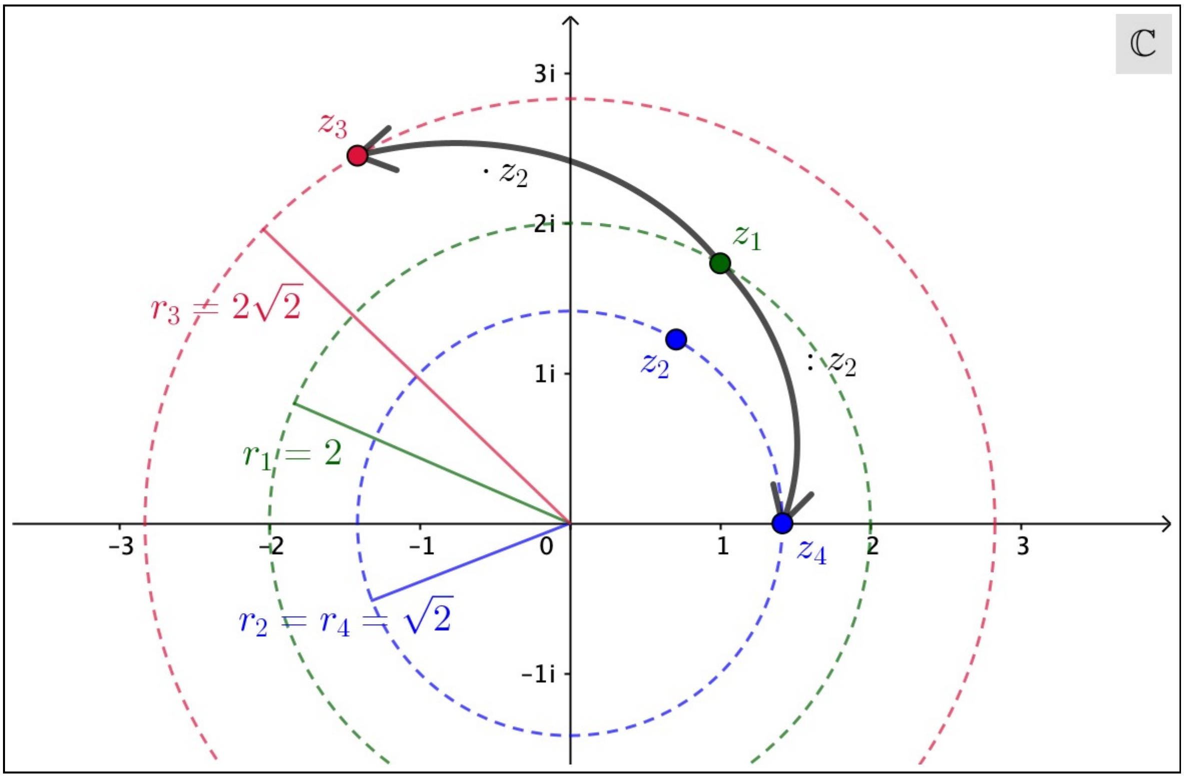
Bei (d) habe ich benutzt, dass die Cosinus- und die Sinusfunktion 2π-periodisch sind, sodass man zum Argument beliebig oft $2\pi = \frac{4\pi}{2}$ addieren darf, ohne dass sich dadurch die Werte der beiden Funktionen verändern würden. So gelange ich von $-\frac{13\pi}{2}$ in die Nähe von 0, nämlich zu $-\frac{\pi}{2}$, wo ich die speziellen Werte von Sinus und Cosinus gut kenne.

13. Die nachfolgende Abbildung illustriert alles Wesentliche zu dieser Aufgabe.

    (a) $z_1 = 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$ hat die kartesischen Koordinaten $x_1 = 1$ und $y_1 = \sqrt{3}$, liegt folglich im 1. Quadranten der komplexen Zahlenebene.
    Ihr Betrag ist $r_1 = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3}\,)^2} = \sqrt{4} = 2$ und die Winkelkoordinate beträgt $\varphi_1 = \arctan \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$.
    Kurz können wir schreiben: $z_1 = 2\,e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

    (b) Die Multiplikation mit einer komplexen Zahl entspricht in der komplexen Ebene stets einer Drehstreckung. Die Zahl z_1 wird durch die Multiplikation mit $z_2 = \sqrt{2}\,e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ mit Faktor $\sqrt{2}$ vom Ursprung weggestreckt und um den Winkel $\frac{\pi}{3}$ im Gegenuhrzeigersinn um den Ursprung gedreht. So entsteht die Zahl $z_3 = z_1 \cdot z_2 = 2\,e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \cdot \sqrt{2}\,e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{2}\,e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

    (c) Die Division durch $z_2 = \sqrt{2}\,e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ staucht den Radius von z_1 mit Faktor $\sqrt{2}$ und dreht die Zahl um $\frac{\pi}{3}$ im Uhrzeigersinn. So ergibt sich $z_4 = z_1 : z_2 = \frac{2\,e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}\,e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{2}\,e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3} - \mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}\,e^{0} = \sqrt{2}$.



14. In der Euler-Schreibweise fallen Multiplikationen und Divisionen ähnlich leicht wie in der Summenschreibweise. Man muss vor allem das Bruchrechnen beherrschen und sollte nicht vergessen, dass die Winkelkoordinate beliebig um Vielfache von $\pm 2\pi$ verändert werden darf:

    (a) $\sqrt{6}\,e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \cdot \left(\sqrt{2}\,e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right)^3 = \sqrt{6}\,e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \cdot 2\sqrt{2}\,e^{3\cdot\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} = 2\sqrt{12}\,e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\frac{9\pi}{4}} = 4\sqrt{3}\,e^{\mathrm{i}\frac{19\pi}{12}} = 4\sqrt{3}\,e^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$

    (b) $\dfrac{6\,e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{36}}}{2\,e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{9}}} = 3\,e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{36}+\mathrm{i}\frac{\pi}{9}} = 3\,e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{36}+\mathrm{i}\frac{4\pi}{36}} = 3\,e^{\mathrm{i}\frac{9\pi}{36}} = 3\,e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

    (c) $\dfrac{\left(12\,e^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{36}}\right)^5}{\left(4\,e^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{9}}\right)^8} = \dfrac{3^5 \cdot 4^5\,e^{-\mathrm{i}\frac{25\pi}{36}}}{4^8\,e^{-\mathrm{i}\frac{40\pi}{9}}} = \dfrac{3^5}{4^3}\,e^{-\mathrm{i}\frac{25\pi}{36}+\mathrm{i}\frac{40\pi}{9}} = \dfrac{243}{64}\,e^{\mathrm{i}\frac{135\pi}{36}} = \dfrac{243}{64}\,e^{\mathrm{i}\frac{15\pi}{4}} = \dfrac{243}{64}\,e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

15. Bei den Summen- resp. Differenzbildungen in (a) und (b) rechne ich zuerst alles in die Summenschreibweise um, bei (c) verwandle ich vorab in die Euler-Schreibweise, weil die Potenz so viel einfacher auszuführen ist:

(a) $$(1+\mathrm{i})+\sqrt{2}\,e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} = 1+\mathrm{i}+\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 1+\mathrm{i}+\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}\right)$$
$$= 1+\mathrm{i}-1+\mathrm{i} = 2\mathrm{i} = 2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$$

(b) $$\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}\,\mathrm{i}-5\,e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}\,\mathrm{i}-5\left(\cos\frac{7\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}\,\mathrm{i}-5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right)$$
$$= \frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}\,\mathrm{i}+\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}\,\mathrm{i} = \frac{10\sqrt{3}}{2}+\frac{10}{2}\,\mathrm{i} = 5\sqrt{3}+5\mathrm{i} = 10e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$$

(c) $$(1+\mathrm{i})^{20} = \left(\sqrt{2}\,e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^{20} = \sqrt{2}^{\,20}\,e^{20\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = 2^{10}\,e^{\mathrm{i}5\pi} = 1024\,e^{\mathrm{i}\pi} = -1024$$

Zu (b): Tatsächlich sind $z_1 = \frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}\,\mathrm{i}$ und $z_2 = -5e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}} = 5e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ dieselben Zahlen: $z_1 = z_2$. Somit lautet das Resultat: $z_1+z_2 = 2z_1 = 5\sqrt{3}+5\mathrm{i} = 10e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

16. (a) $f''-f = x^2$ ist eine **lineare, inhomogene DGL 2. Ordnung**.
Wir leiten den Ansatz zuerst zweimal ab:

$$f(x) = -x^2-2+Ae^x+Be^{-x} \quad\Rightarrow\quad f'(x) = -2x+Ae^x-Be^{-x} \quad\Rightarrow\quad f''(x) = -2+Ae^x+Be^{-x}$$

Nun setzen wir Funktion und zweite Ableitung in die DGL ein:

$$f''(x)-f(x) = -2+Ae^x+Be^{-x}-\big(-x^2-2+Ae^x+Be^{-x}\big) = x^2$$

Somit ist gezeigt, dass der Ansatz die DGL erfüllt. Aus den RBs folgen die Werte der Parameter A und B:

$$\left|\begin{array}{c} f(0)=2 \\ f'(0)=3 \end{array}\right| \quad\Rightarrow\quad \left|\begin{array}{c} 0-2+A+B \overset{!}{=} 2 \\ 0+A-B \overset{!}{=} 3 \end{array}\right| \quad\Rightarrow\quad -2+2A=5 \quad\Rightarrow\quad A=\frac{7}{2}$$
$$\Rightarrow\quad -2+\frac{7}{2}+B=2 \quad\Rightarrow\quad B=\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad f(x) = -x^2-2+\frac{7}{2}\,e^x+\frac{1}{2}\,e^{-x}$$

(b) Bei $f'-(2x+1)f = 2x+1$ handelt es sich um eine **lineare, inhomogene DGL 1. Ordnung**.
Wiederum leiten wir den Ansatz zuerst ab:

$$f(x) = -1+Ae^{x^2+x} \quad\Rightarrow\quad f'(x) = Ae^{x^2+x}\cdot(2x+1)$$

Funktion und Ableitung setzen wir in die DGL ein:

$$f'(x)-(2x+1)f(x) = Ae^{x^2+x}\cdot(2x+1)-(2x+1)\big(-1+Ae^{x^2+x}\big) = 2x+1$$

Effektiv erfüllt der Ansatz die DGL. Auch hier liefert die RB den fehlenden Parameter A:

$$f(-2) = -1+Ae^{4-2} = -1+Ae^2 \overset{!}{=} 0 \quad\Rightarrow\quad Ae^2=1 \quad\Rightarrow\quad A=\frac{1}{e^2}$$
$$\Rightarrow\quad f(x) = -1+\frac{e^{x^2+x}}{e^2} = e^{x^2+x-2}-1$$

(c) $e^f \cdot f' = 2x$ ist eine **nicht-lineare, inhomogene DGL 1. Ordnung**.
Erneut starten wir mit der Ableitung des Funktionsansatzes:

$$f(x) = \ln(x^2 + A) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x^2 + A} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + A}$$

Das Einsetzen von $f(x)$ und $f'(x)$ in die DGL zeigt, dass dieser Ansatz die DGL löst:

$$e^{f(x)} \cdot f'(x) = e^{\ln(x^2+A)} \cdot \frac{2x}{x^2 + A} = (x^2 + A) \cdot \frac{2x}{x^2 + A} = 2x$$

Dabei haben wir benutzt, dass $e^{\ln a} = a$ ist.
Aus der Randbedingung folgt der Wert des Parameters A:

$$f(e^2) = \ln(e^2 + A) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad e^2 + A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = 1 - e^2 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \ln(x^2 + 1 - e^2)$$

17. Für die Wurzelgleichungen erhalten wir die folgenden Lösungen:

(a) $z^3 = -2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad r^3 e^{3\mathrm{i}\varphi} = 4\, e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}2\pi k}$ mit $k \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{4}$ und $\varphi = \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}\,k$

$\Rightarrow \quad \mathbb{L} = \left\{ \sqrt[3]{4} \cdot e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{9}},\ \sqrt[3]{4} \cdot e^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{9}},\ \sqrt[3]{4} \cdot e^{-\mathrm{i}\frac{4\pi}{9}} \right\}$

(b) $z^6 = \frac{1}{8} \quad \Leftrightarrow \quad r^6 e^{6\mathrm{i}\varphi} = \frac{1}{8}\, e^{\mathrm{i}2\pi k}$ mit $k \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[6]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\varphi = \frac{2\pi}{6}\,k = \frac{\pi}{3}\,k$

$\Rightarrow \quad \mathbb{L} = \left\{ z = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{\mathrm{i}k\cdot\frac{\pi}{3}} \,\middle|\, k = 0, \ldots, 5 \right\}$

(c) $z^3 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad r^3 e^{3\mathrm{i}\varphi} = e^{\mathrm{i}\pi + \mathrm{i}2\pi k}$ mit $k \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad r = 1$ und $\varphi = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\,k$

$\Rightarrow \quad \mathbb{L} = \left\{ e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}, -1, e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \right\}$

(d) $z^2 = \frac{\sqrt{6}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{8}\,\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad r^2 e^{2\mathrm{i}\varphi} = \frac{1}{\sqrt{8}}\, e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}2\pi k}$ mit $k \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[4]{8}$ und $\varphi = -\frac{\pi}{6} + \pi\,k$

$\Rightarrow \quad \mathbb{L} = \left\{ \frac{1}{\sqrt[4]{8}} \cdot e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}},\ \frac{1}{\sqrt[4]{8}} \cdot e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} \right\}$

18. (a) Auch bei komplexen quadratischen Gleichungen können wir stets mit der Mitternachtsformel arbeiten:

$$z^2 - z + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

Die Quadratwurzel einer negativen reellen Zahl ist im Komplexen rasch gezogen:

$$w^2 = -3 \quad \Leftrightarrow \quad w_{1/2} = \pm\sqrt{3}\,\mathrm{i}$$

Nun haben wir eigentlich zweimal ein $\pm$, eines in der Mitternachtsformel, eines aus dem Ziehen der komplexen Wurzel. Die beiden enthalten aber genau dieselbe Variation. Wir brauchen somit nur eines davon. Das bedeutet auch für spätere Aufgaben. Wir brauchen nur einen der beiden Quadratwurzelwert zu bestimmen, der andere ist dann jeweils das Negative des ersten, was aber bereits durch das $\pm$ innerhalb der Mitternachtsformel abgedeckt wird.
Hier schliessen wir ab:

$$z_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L} = \left\{ \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i} \right\}$$

(b) Wiederum benutzen wir die Mitternachtsformel:

$$z^2 - 2z + 2\mathrm{i} + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(2\mathrm{i}+1)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-8\mathrm{i}}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{-2\mathrm{i}}}{2} = 1 \pm \sqrt{-2\mathrm{i}}$$

$-2\mathrm{i}$ sitzt auf der negativen imaginären Achse. Der Drehwinkel bis zu dieser Zahl beträgt $-\frac{\pi}{2}$. Damit muss eine der beiden Wurzeln den Drehwinkel $-\frac{\pi}{4}$ aufweisen. Der Betrag der Wurzel muss $\sqrt{2}$ sein, denn $-2\mathrm{i}$ hat Betrag 2. Mit der Eulerformel erhalten wir für die Wurzel in Summenschreibweise:

$$w_1 = \sqrt{2} \cdot e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i} \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - \mathrm{i}$$

Daraus ergibt sich für die Lösung unserer quadratischen Gleichung:

$$z_{1/2} = 1 \pm (1 - \mathrm{i}) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{2 - \mathrm{i}, \mathrm{i}\}$$

(c) Wir nehmen alles auf eine Seite und benutzen wieder die Mitternachtsformel:

$$\begin{aligned} z^2 + z - 3 = 2\mathrm{i}z + \mathrm{i} \quad &\Leftrightarrow \quad z^2 + (1-2\mathrm{i})z - 3 - \mathrm{i} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad z_{1/2} = \frac{-1 + 2i \pm \sqrt{(1-2\mathrm{i})^2 - 4(-3-\mathrm{i})}}{2} \\ &= \frac{-1 + 2\mathrm{i} \pm \sqrt{1 - 4\mathrm{i} - 4 + 12 + 4\mathrm{i}}}{2} = \frac{-1 + 2\mathrm{i} \pm \sqrt{9}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm 3 + 2\mathrm{i}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} + \mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{1 + \mathrm{i}, -1 + \mathrm{i}\} \end{aligned}$$

(d) Mit der Mitternachtsformel folgt:

$$\mathrm{i}z^2 + 2z = 3\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{i}z^2 + 2z - 3\mathrm{i} = 0$$

$$\Rightarrow \quad z_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12\mathrm{i}^2}}{2\mathrm{i}} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2\mathrm{i}} = \frac{-1 \pm \sqrt{-2}}{\mathrm{i}} = \frac{-1 \pm \sqrt{2}\,\mathrm{i}}{\mathrm{i}} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L} = \left\{\mathrm{i} \pm \sqrt{2}\right\}$$

(e) Hier ergibt sich wieder einmal ein etwas mühsamere Diskriminantenwurzel:

$$\mathrm{i}z^2 + 3z - 2\mathrm{i} = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{i}z^2 + 3z - 2\mathrm{i} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \quad z_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4\mathrm{i}\left(-2\mathrm{i} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)}}{2\mathrm{i}} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 8\mathrm{i}^2 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}} = \frac{-3 \pm \sqrt{1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}}$$

Eine Wurzel der Diskriminante $D = 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$ ergibt sich aus deren Radius $r = \sqrt{1+3} = 2$ und dem Winkel $\varphi = \arctan\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$ sofort zu:

$$w_1 = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i} \cdot \sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$$

Somit folgt für die Lösungen:

$$\begin{aligned} z_{1/2} &= \frac{-3 \pm \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)}{2i} = \frac{3}{2}\mathrm{i} \mp \frac{\sqrt{6}}{4}\mathrm{i} \pm \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \Rightarrow \quad \mathbb{L} &= \left\{\frac{\sqrt{2}}{4} + \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{6}}{4}\right)\mathrm{i}, -\frac{\sqrt{2}}{4} + \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{6}}{4}\right)\mathrm{i}\right\} \end{aligned}$$

(f) Und schliesslich nochmals etwas einfacher:

$$z^2 - (2+\mathrm{i})z = -1 - \mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad z^2 - (2+\mathrm{i})z + 1 + \mathrm{i} = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad z_{1/2} &= \frac{2 + \mathrm{i} \pm \sqrt{(2+\mathrm{i})^2 - 4(1+\mathrm{i})}}{2} = \frac{2 + \mathrm{i} \pm \sqrt{4 + 4\mathrm{i} - 1 - 4 - 4\mathrm{i}}}{2} \\ &= \frac{2 + \mathrm{i} \pm \sqrt{-1}}{2} = \frac{2 + \mathrm{i} \pm \mathrm{i}}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{1 + \mathrm{i}, 1\} \end{aligned}$$

19. (a) Für die zweifachen partiellen Ableitungen von $E_y(x,t)$ ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\Big(- E_0\omega\cos(kx-\omega t)\Big) = -E_0\omega^2\sin(kx-\omega t) = -\omega^2\cdot E_y(x,t)$$
$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(E_0 k\cos(kx-\omega t)\Big) = -E_0 k^2\sin(kx-\omega t) = -k^2\cdot E_y(x,t)$$

Diese Ableitungen setzen wir in die partielle DGL ein:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\cdot\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \quad\Rightarrow\quad -\omega^2\cdot E_y(x,t) = -\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\cdot k^2\cdot E_y(x,t) \quad\Rightarrow\quad \omega^2 = \frac{k^2}{\mu_0\varepsilon_0}$$

Gilt $\omega^2 = \frac{k^2}{\mu_0\varepsilon_0}$, so erfüllt die Funktion $E_y(x,t) = E_0\sin(kx-\omega t)$ die DGL zu allen Zeitpunkten t an allen Orten x.

(b) Aus der Wellenbeziehung folgt:

$$c = \lambda\cdot f = \frac{2\pi}{k}\cdot\frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega}{k}$$

Damit erhalten wir aber aus $\omega^2 = \frac{k^2}{\mu_0\varepsilon_0}$:

$$\omega^2 = \frac{k^2}{\mu_0\varepsilon_0} \quad\Rightarrow\quad c^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0} \quad\Rightarrow\quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

20. (a) Wir leiten zuerst zweimal ab:

$$\begin{aligned}
&\psi(x) = A\cdot e^{-kx^2}\\
\Rightarrow\quad &\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} = -2kx\cdot A\cdot e^{-kx^2} = -2kx\cdot\psi(x)\\
\Rightarrow\quad &\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = -2k\cdot\psi(x) - 2kx\cdot\psi'(x) = -2k\cdot\psi(x) - 2kx\cdot\big(-2kx\cdot\psi(x)\big)\\
&\phantom{\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}} = (-2k+4k^2x^2)\cdot\psi(x)
\end{aligned}$$

Die zweite Ableitung setzen wir nun in genau dieser Form in die DGL des quantenmechanischen harmonischen Oszillators ein:

$$\begin{aligned}
&-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot(-2k+4k^2x^2)\,\psi(x) + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi(x) = E\psi(x)\\
\Rightarrow\quad &\frac{\hbar^2}{2m}\cdot(2k-4k^2x^2) + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = E\\
\Leftrightarrow\quad &\frac{\hbar^2k}{m} - \frac{2\hbar^2k^2}{m}x^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2 = E
\end{aligned}$$

Nun gibt es in dieser Gleichung sowohl quadratische, als auch konstante Glieder in x. Damit für jeden beliebigen Wert von x die Gleichung insgesamt korrekt ist, müssen diese unterschiedlichen Qualitäten von Gliedern ihren Teil der Gleichung unabhängig voneinander erfüllen. Das bedeutet, in dieser einen Gleichung sind eigentlich zwei Gleichungen enthalten, aus denen wir auf k und E schließen können:

$$\left|\begin{array}{c} -\frac{2\hbar^2k^2}{m}x^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2 = 0\\ \frac{\hbar^2k}{m} = E\end{array}\right| \quad\Rightarrow\quad \left|\begin{array}{c} -4\hbar^2k^2 + m^2\omega^2 = 0\\ \frac{\hbar^2k}{m} = E\end{array}\right|$$

Dass sich nun alle x herausgestrichen haben, zeigt, dass der Ansatz die DGL löst, solange diese beiden Parametergleichungen erfüllt sind.

Aus der ersten Gleichung schließen wir auf k:

$$4\hbar^2k^2 = m^2\omega^2 \quad\Rightarrow\quad k = \frac{m\omega}{2\hbar}$$

Aus der zweiten Gleichung erhalten wir nun aufgrund des Ausdrucks für k für E:

$$E = \frac{\hbar^2k}{m} = \frac{\hbar^2}{m}\cdot\frac{m\omega}{2\hbar} = \frac{\hbar\omega}{2}$$

(b) Mit dem zweiten Ansatz gehen wir ganz genau gleich vor wie mit dem ersten:

$$\begin{aligned}
&\psi(x) = B \cdot x \cdot e^{-kx^2} \\
\Rightarrow \quad &\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} = B \cdot \left(e^{-kx^2} - 2kx^2 e^{-kx^2}\right) = B \cdot \left(1 - 2kx^2\right) e^{-kx^2} \\
\Rightarrow \quad &\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = B \cdot \Big(- 4kxe^{-kx^2} - 2kx\,(1 - 2kx^2)\, e^{-kx^2}\Big) \\
&\qquad = B \cdot x \cdot e^{-kx^2} \cdot \Big(- 4k - 2k\left(1 - 2kx^2\right)\Big) = \left(- 6k + 4k^2x^2\right) \cdot \psi(x)
\end{aligned}$$

Damit gehen wir nun wieder in die DGL hinein:

$$\begin{aligned}
&-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \left(- 6k + 4k^2x^2\right) \psi(x) + \frac{1}{2}\, m\omega^2 x^2 \psi(x) = E\psi(x) \\
\Rightarrow \quad &\frac{\hbar^2}{2m} \cdot (6k - 4k^2x^2) + \frac{1}{2}\, m\omega^2 x^2 = E \\
\Leftrightarrow \quad &\frac{3\hbar^2 k}{m} - \frac{2\hbar^2 k^2}{m}\, x^2 + \frac{m\omega^2}{2}\, x^2 = E
\end{aligned}$$

Wiederum entstehen hieraus zwei Gleichungen, eine für die quadratischen und eine für die konstanten Glieder:

$$\left| \begin{array}{c} -\frac{2\hbar^2k^2}{m}\, x^2 + \frac{m\omega^2}{2}\, x^2 = 0 \\ \frac{3\hbar^2 k}{m} = E \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{c} -4\hbar^2k^2 + m^2\omega^2 = 0 \\ \frac{3\hbar^2 k}{m} = E \end{array} \right|$$

Aus der oberen Gleichung folgt genau der gleiche Ausdruck für k, den wir schon unter (a) erhalten hatten:

$$4\hbar^2k^2 = m^2\omega^2 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{m\omega}{2\hbar}$$

Für die Energie ergibt sich nun aber ein dreimal so großer Wert:

$$E = \frac{3\hbar^2 k}{m} = \frac{3\hbar^2}{m} \cdot \frac{m\omega}{2\hbar} = \frac{3\hbar\omega}{2}$$