Übungen zur Quantenphysik – Lösungen Serie 8

1. *Leichte Integralkost*

   Für die sechs Integrale erhalten wir:

   (a) $\displaystyle\int_0^2 \left(x^2+1\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}+x\right]\Bigg|_0^2 = \frac{8}{3}+2-0 = \frac{14}{3}$

   (b) $\displaystyle\int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x\,\Big|_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = -(-1)+1 = 2$

   (c) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \left(x^3-x\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = \frac{9}{4}-\frac{3}{2}-\frac{4}{4}+\frac{2}{2} = \frac{3}{4}$

   (d) $\displaystyle\int_4^9 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\,x\sqrt{x}\,\Big|_4^9 = \frac{2}{3}\left(9\sqrt{9}-4\sqrt{4}\right) = \frac{2}{3}(27-8) = \frac{38}{3}$

   (e) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x\,\Big|_e^{e^2} = \ln e^2 - \ln e = 2-1 = 1$

   (f) $\displaystyle\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\,\Big|_4^9 = 2\big(\sqrt{9}-\sqrt{4}\big) = 2(3-2) = 2$

2. *Der fallende Stein (vgl. Griffiths: Beispiel 1.1 und Aufgabe 1.2)*

   (a) Zunächst berechnen wir den mittleren quadratischen Wert:

   $$\langle x^2\rangle = \int_0^h x^2\varrho(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^h \frac{x^2}{2\sqrt{hx}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{h}}\cdot\int_0^h x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{h}}\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\,\Bigg|_0^h = \frac{1}{5\sqrt{h}}h^{\frac{5}{2}} = \frac{h^2}{5}$$

   Daraus folgt nun die Varianz σ^2:

   $$\sigma^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \frac{h^2}{5} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{h^2}{5}-\frac{h^2}{9} = \frac{(9-5)h^2}{45} = \frac{4h^2}{45}$$

   Die Wurzel aus diesem Resultat ergibt schließlich die Standardabweichung σ:

   $$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{4h^2}{45}} = \frac{2h}{3\sqrt{5}} \approx 0.298\,h$$

   (b) Es ist geschickter mit der Gegenwahrscheinlichkeit zu rechnen. D.h., wir eruieren, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein zufällig ausgewähltes Foto den Stein innerhalb einer Standardabweichung um den Mittelwert zeigt. Diese Gegenwahrscheinlichkeit beträgt:

   $$\begin{aligned}\int_{\langle x\rangle-\sigma}^{\langle x\rangle+\sigma} \varrho(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\langle x\rangle-\sigma}^{\langle x\rangle+\sigma} \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{hx}} = \frac{1}{2\sqrt{h}}\cdot\int_{\langle x\rangle-\sigma}^{\langle x\rangle+\sigma} x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{h}}\cdot 2\cdot x^{\frac{1}{2}}\,\Bigg|_{\langle x\rangle-\sigma}^{\langle x\rangle+\sigma} \\ &= \frac{1}{\sqrt{h}}\cdot\left(\sqrt{\langle x\rangle+\sigma}-\sqrt{\langle x\rangle-\sigma}\right) \approx \sqrt{0.333+0.298}-\sqrt{0.333-0.298} \\ &\approx 0.607 = 60.7\,\%\end{aligned}$$

   Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit auf einem zufällig ausgewählten Foto den Stein außerhalb des Intervalls $[\langle x\rangle-\sigma;\langle x\rangle+\sigma]$ zu finden $39.3\,\%$.

3. *Die einfachst mögliche Wahrscheinlichkeitsverteilung*

(a) Diese Überprüfung fällt denkbar leicht:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varrho(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{1}{a}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{a}\bigg|_0^a = \frac{a}{a} - \frac{0}{a} = 1$$

Im Prinzip haben wir ja einfach die Rechtecksfläche unter dem Graphen der Wahrscheinlichkeitsverteilung berechnet. Ihre Höhe ist $\frac{1}{a}$ und ihre Länge a, sodass als Fläche automatisch 1 herauskommt.

(b) Diese Berechnung fällt auch nicht weiter schwer:

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,\varrho(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{x}{a}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2a}\bigg|_0^a = \frac{a^2}{2a} - \frac{0}{2a} = \frac{a}{2}$$

Dieses Resultat durfte nicht anders herauskommen, denn im statistischen Mittel muss unsere Ameise doch genau in der Mitte des Stabes zu finden sein.

(c) Ganz analog erhalten wir für den Erwartungswert des Ortsquadrates:

$$\langle x^2\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,\varrho(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{x^2}{a}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3a}\bigg|_0^a = \frac{a^3}{3a} - \frac{0}{3a} = \frac{a^2}{3}$$

(d) Für Varianz und Standardabweichung folgt:

$$\sigma^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \frac{a^2}{3} - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{12} \qquad \Rightarrow \qquad \sigma = \frac{a}{2\sqrt{3}} \approx 29\,\% \cdot a$$

(e) Für die Chance p, die Ameise auf einer zufälligen Fotografie innerhalb einer Standardabweichung um den Durchschnittswert zu finden, erhalten wir:

$$p = \int_{\langle x\rangle-\sigma}^{\langle x\rangle+\sigma} \varrho(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\langle x\rangle-\sigma}^{\langle x\rangle+\sigma} \frac{1}{a}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{a}\bigg|_{\langle x\rangle-\sigma}^{\langle x\rangle+\sigma} = \frac{\langle x\rangle + \sigma - \langle x\rangle + \sigma}{a} = \frac{2\sigma}{a} = \frac{2\cdot\frac{a}{2\sqrt{3}}}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 58\,\%$$