Übungen zur Quantenphysik – Lösungen Serie 9

1. *Lineare Substitution – ein paar Trainingsaufgaben*

   (a) Substitution: $s = 2x + 4 \Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{1}{2}$.

   $$\int_{-2}^{-1} 2(2x+4)^5 \,\mathrm{d}x = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 s^5 \,\mathrm{d}s = \frac{1}{6}\, s^6 \Big|_0^2 = \frac{64}{6} = \frac{32}{3}$$

   (b) Substitution: $\beta = 3\alpha \Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{1}{3}$.

   $$\int_{\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(3\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{3} \cdot \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\beta \,\mathrm{d}\beta = -\frac{1}{3} \cdot \cos\beta \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3}\left(0 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}$$

   (c) Substitution: $\alpha = \frac{\vartheta}{2} - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{1}{1/2} = 2$.

   $$\int_{\pi}^{2\pi} \cos\left(\frac{\vartheta}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \mathrm{d}\vartheta = 2 \cdot \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} \cos\alpha \,\mathrm{d}\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{3} - 1$$

   (d) Substitution: $s = \frac{x}{4} \Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{1}{1/4} = 4$.

   $$\int_{4e}^{4e^3} \ln\frac{x}{4}\,\mathrm{d}x = 4 \cdot \int_e^{e^3} \ln s \,\mathrm{d}s = 4 \cdot s(\ln s - 1)\Big|_e^{e^3} = 4\left(e^3 \cdot 2 - e \cdot 0\right) = 8e^3$$

   Nebenbei: Im Integralskript finden wir: $\int \ln|x|\,\mathrm{d}x = x\big(\ln|x| - 1\big) + C$
   Dabei dürfen wir in unserem Fall die Betragsstriche sofort weglassen, weil alle von uns betrachteten s-Werte zwischen e und e^3 liegen, also von vornherein positiv sind.

   (e) Substitution: $x = 2\lambda + 1 \Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{1}{2}$.

   $$\int_4^{12} \sqrt{2\lambda+1}\,\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2} \cdot \int_9^{25} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} \Big|_9^{25} = \frac{1}{3}\,(125 - 27) = \frac{98}{3}$$

   (f) Substitution: $x = 2\lambda + 1 \Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{1}{2}$. Außerdem ist: $\lambda = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x-1)$.

   $$\int_0^{\frac{3}{2}} \lambda\sqrt{2\lambda+1}\,\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2} \cdot \int_1^4 \frac{1}{2}\,(x-1)\,\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} \cdot \int_1^4 \left(x\sqrt{x} - \sqrt{x}\,\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4} \cdot \int_1^4 \left(x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x$$
   $$= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}\,x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_1^4 = \frac{1}{4}\left(\frac{64}{5} - \frac{16}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{3}\right) = \frac{29}{15}$$

   (g) Substitution: $s = x + 1 \Rightarrow \frac{1}{m} = 1$. Außerdem ist: $x = s - 1 \Rightarrow x - 1 = s - 2$.

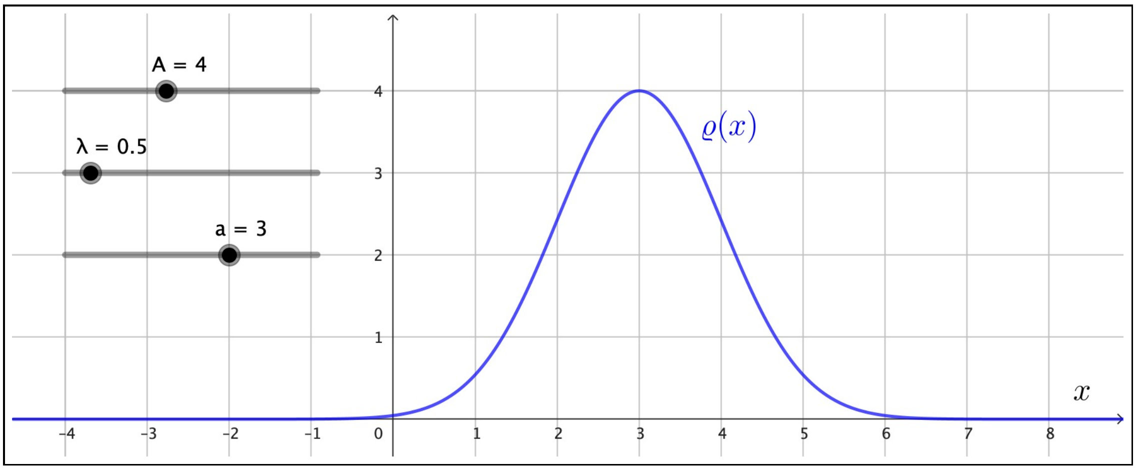
   $$\int_{-1}^{0} (x-1)(x+1)^5\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (s-2)s^5\,\mathrm{d}s = \int_0^1 \left(s^6 - 2s^5\right)\mathrm{d}s = \left(\frac{1}{7}\,s^7 - \frac{1}{3}\,s^6\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{7} - \frac{1}{3} = -\frac{4}{21}$$

   (h) Substitution: $s = \frac{1}{3}\,x - \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{1}{1/3} = 3$. Außerdem ist: $x = 3s + \frac{1}{2}$.

   $$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{4}} \frac{2x}{\sqrt{\frac{1}{3}\,x - \frac{1}{6}}}\,\mathrm{d}x = 3 \cdot \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{2\left(3s + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{s}}\,\mathrm{d}s = 3 \cdot \int_0^{\frac{1}{4}} \left(6s^{\frac{1}{2}} + s^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}s$$
   $$= 3\left(4\,x^{\frac{3}{2}} + 2\,x^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_0^{\frac{1}{4}} = 3\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{9}{2}$$

2. *Normalverteilung und Gauss'sche Glockenkurve – ein erstes Kennenlernen*

Hier ein Beispiel der Glockenkurve zur Normalverteilung $\varrho(x) = A \cdot e^{-\lambda(x-a)^2}$ für $A = 4$, $\lambda = 0.5$ und $a = 3$:



Durch Ausprobieren mit den Schiebereglern werden die Auswirkungen der Parameter klar:

Maximalstelle a: Über der Stelle $x = a$ nimmt die Normalverteilung ihr Maximum an.

Vertikale Streckung A: Der Parameter A steht für den maximalen y-Wert der Normalverteilung, also für den Funktionswert über der Stelle $x = a$. Das wird auch rechnerisch sofort klar:

$$\varrho(a) = A \cdot e^{-\lambda(a-a)^2} = A \cdot e^0 = A$$

Schmalheit λ: Je größer der Wert des Parameters λ ist, desto schmaler ist die "Glocke". Umgekehrt wird die Verteilung umso breiter, je kleiner λ ist.

3. *Lineare Substitution bei Gauss-Integralen*

(a) Für $n = 0$ ist $x^{2n}e^{-x^2/b^2} = x^0 e^{-x^2/b^2} = e^{-x^2/b^2}$. Das bedeutet, das Integral links in II. entspricht dem Integral in I..

Schauen wir nun, welcher Wert sich gemäß II. mit $n = 0$ für dieses Integral ergibt:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2/b^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi} \cdot \frac{(2 \cdot 0)!}{0!} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^{2\cdot 0+1} = \sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{1} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^{1} = \sqrt{\pi} \cdot \frac{b}{2}$$

Da entspricht genau dem Wert, der in I. für dieses Integral angegeben wird.

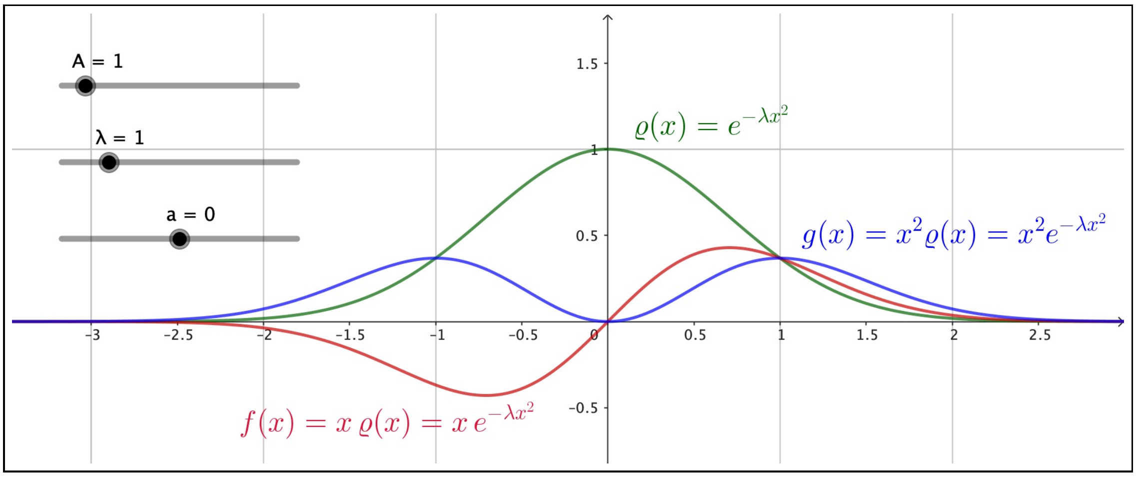
(b) Beim ersten der beiden Integrale geht es um das Integral III. mit $n = 0$, denn $x^{2\cdot 0+1} = x^1 = x$. Notieren wir das Resultat von III. also für $n = 0$:

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x^2/b^2}\,\mathrm{d}x = \frac{0!}{2} \cdot b^{2\cdot 0+2} = \frac{b^2}{2}$$

Beim zweiten Integral geht es um das Resultat von II. für $n = 1$, denn $x^{2\cdot 1} = x^2$. Dafür folgt:

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2/b^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi} \cdot \frac{(2 \cdot 1)!}{1!} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^{2\cdot 1+1} = \sqrt{\pi} \cdot \frac{2}{1} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^{3} = 2\sqrt{\pi} \cdot \frac{b^3}{8} = \sqrt{\pi} \cdot \frac{b^3}{4}$$

(c) Hier die drei Funktionsgraphen für $e^{-\lambda x^2}$, $f(x) = x\,e^{-\lambda x^2}$ und $g(x) = x^2 e^{-\lambda x^2}$ in GeoGebra:



Da $e^{-\lambda x^2}$ gerade und somit achsensymmetrisch ist, wird $f(x) = x\,e^{-\lambda x^2}$ ungerade resp. punktsymmetrisch und $g(x) = x^2 e^{-\lambda x^2}$ wieder gerade resp. achsensymmetrisch.

(d) Aufgrund der eben verstandenen Symmetrieeigenschaften erhalten wir nun I. und den Resultaten aus (b)die folgenden Werte für die drei Integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/b^2}\,\mathrm{d}x \overset{*}{=} 2\cdot\int_0^{+\infty} e^{-x^2/b^2}\,\mathrm{d}x \overset{\text{I.}}{=} 2\cdot\sqrt{\pi}\cdot\frac{b}{2} = \sqrt{\pi}\cdot b$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,e^{-x^2/b^2}\,\mathrm{d}x \overset{**}{=} 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,e^{-x^2/b^2}\,\mathrm{d}x \overset{*}{=} 2\cdot\int_0^{+\infty} x^2\,e^{-x^2/b^2}\,\mathrm{d}x \overset{\text{(b)}}{=} 2\cdot\sqrt{\pi}\cdot\frac{b^3}{4} = \sqrt{\pi}\cdot\frac{b^3}{2}$$

Dabei habe ich bei $*$ die Achsensymmetrie und bei $**$ die Punktsymmetrie der Funktion ausgenützt. Alle drei Integrale haben schließlich symmetrische Integrationsgrenzen!

(e) Berechnen wir das erste der beiden Integrale:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\varrho(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot A\,e^{-\lambda(x-a)^2}\mathrm{d}x \overset{\text{i.}}{=} A\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} x\,e^{-(x-a)^2/b^2}\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{ii.}}{=} A\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}(s+a)\,e^{-s^2/b^2}\mathrm{d}s \overset{\text{iii.}}{=} A\cdot\left[\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} s\,e^{-s^2/b^2}\mathrm{d}s}_{=0} + \int_{-\infty}^{+\infty} a\,e^{-s^2/b^2}\mathrm{d}s\right] \\ &\overset{\text{iv.}}{=} Aa\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2/b^2}\mathrm{d}s \overset{\text{v.}}{=} Aa\cdot\sqrt{\pi}\cdot b \overset{\text{vi.}}{=} Aa\cdot\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = Aa\cdot\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\end{aligned}$$

Erläuterung der einzelnen Schritte:

i. Wir setzen $\lambda = \frac{1}{b^2}$.

ii. Substitution: $s = x - a$ mit $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = 1$ und $x = s + a$.
Die Integrationsgrenzen bleiben dieselben, weil $+\infty - a = +\infty$ und $-\infty - a = -\infty$.

iii. Wir multiplizieren aus und teilen die Summe unter dem Integral in zwei Integrale auf (Summenregel).

iv. Das erste der beiden Integrale ist gleich 0, da bei symmetrischen Integrationsgrenzen über eine punktsymmetrische Funktion integriert wird (vgl. (d)).

v. Wir benutzen das Resultat aus (d): $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2/b^2}\,\mathrm{d}s = \sqrt{\pi}\cdot b$.

vi. Aus $\lambda = \frac{1}{b^2}$ folgt umgekehrt: $b = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$. Dies setzen wir zurück ein.

In gleicher Weise können wir das zweite Integral berechnen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,\varrho(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot A\,e^{-\lambda(x-a)^2}\mathrm{d}x \overset{\text{i.}}{=} A\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,e^{-(x-a)^2/b^2}\mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{ii.}}{=} A\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}(s+a)^2\,e^{-s^2/b^2}\mathrm{d}s \overset{\text{iii.}}{=} A\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\left(s^2+2sa+a^2\right)e^{-s^2/b^2}\mathrm{d}s$$

$$\overset{\text{iv.}}{=} A\cdot\Big[\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} s^2\,e^{-s^2/b^2}\mathrm{d}s}_{=\sqrt{\pi}\cdot\frac{b^3}{2}} + 2a\cdot\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} s\,e^{-s^2/b^2}\mathrm{d}s}_{=0} + a^2\cdot\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2/b^2}\mathrm{d}s}_{=\sqrt{\pi}\cdot b}\Big]$$

$$\overset{\text{v.}}{=} A\cdot\left(\sqrt{\pi}\cdot\frac{b^3}{2}+0+a^2\cdot\sqrt{\pi}\cdot b\right) \overset{\text{vi.}}{=} A\cdot\sqrt{\pi}\cdot b\cdot\left(\frac{b^2}{2}+a^2\right)$$

$$\overset{\text{vii.}}{=} A\cdot\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\cdot\left(\frac{1}{2\lambda}+a^2\right) = A\left(\frac{1}{2\lambda}+a^2\right)\cdot\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$

Erläuterung der Schritte:

i. Wir setzen $\lambda = \frac{1}{b^2}$.

ii. Substitution: $s = x - a$ mit $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = 1$ und $x = s + a$.
Die Integrationsgrenzen bleiben dieselben, weil $+\infty - a = +\infty$ und $-\infty - a = -\infty$.

iii. 1. Binomische Formel: $(s+a)^2 = s^2 + 2sa + a^2$.

iv. Wir multiplizieren aus und teilen die Summe unter dem Integral in drei Integrale auf (Summenregel).

v. Wir benutzen die Resultate aus (d).

vii. Aus $\lambda = \frac{1}{b^2}$ folgt umgekehrt: $b = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$. Dies setzen wir zurück ein.

Halten wir die Resultate aller drei Integrale nochmals übersichtlich fest:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varrho(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} A\,e^{-\lambda(x-a)^2}\,\mathrm{d}x = A\cdot\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\varrho(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot A\,e^{-\lambda(x-a)^2}\,\mathrm{d}x = Aa\cdot\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,\varrho(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot A\,e^{-\lambda(x-a)^2}\,\mathrm{d}x = A\left(\frac{1}{2\lambda}+a^2\right)\cdot\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$

Wir bemerken an dieser Stelle schon einmal: Der Ausdruck $\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$ kommt überall vor. Alle drei Resultate enthalten die vertikale Skalierung A, denn diese wurde als multiplikativer Faktor vors Integral gezogen.

4. *Die Normalverteilung als Wahrscheinlichkeitsdichte*

(a) Die Normalverteilung $\varrho(x) = A\,e^{-\lambda(x-a)^2}$ soll nun tatsächlich eine Wahrscheinlichkeitsdichte sein. Dann muss sie auch normiert sein. D.h., die Normierungsbedingung – im QM-Buch von Griffiths die Gleichung 1.16 – muss gelten:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varrho(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Dies legt den Parameter A in Abhängigkeit der anderen Parameter fest, wie wir unter Ausnutzung unseres ersten Resultates aus Aufgabe 3.(e) einsehen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varrho(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} A\,e^{-\lambda(x-a)^2}\,\mathrm{d}x = A\cdot\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \overset{!}{=} 1 \quad\Rightarrow\quad A = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}$$

Unser Vorfaktor $A = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}$ kompensiert also genau den bei allen Integralen auftretenden Faktor $\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$. Wir verstehen gut, dass A nicht von a abhängt, denn der Parameter a ist regelt ja einfach die horizontale Verschiebung der Maximalstelle der Verteilung, ändert aber nichts an ihrer Kurvenform und damit an der Fläche unter ihrem Graphen.

Für den Erwartungswert $\langle x \rangle$ des Ortes sollten wir a erhalten. Dank unserer in Aufgabe 3 Vorarbeit ist die zugehörige Rechnung in Nullkommanichts erledigt:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,\varrho(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} Ax\,e^{-\lambda(x-a)^2}\,\mathrm{d}x = Aa \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} = a$$

Wie vorhin gerade festgehalten hebt $A = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}$ den Faktor $\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$ auf.

Gleiches passiert bei der Berechnung des mittleren quadratischen Ortes $\langle x^2 \rangle$:

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varrho(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} Ax^2 e^{-\lambda(x-a)^2}\,\mathrm{d}x = A\left(\frac{1}{2\lambda} + a^2\right) \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} = \frac{1}{2\lambda} + a^2$$

Damit können wir nun auch die Varianz σ^2 resp. die Standardabweichung σ berechnen. Wir erwarten, dass diese Größen direkt mit dem Parameter λ zu tun haben, denn wie wir in GeoGebra gesehen hatten, steuert λ die "Schmalheit" der Verteilung. Und tatsächlich kommt das so heraus:

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{1}{2\lambda} + a^2 - a^2 = \frac{1}{2\lambda} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$$

(b) Mit (a) haben wir alle Resultate zur Griffiths-Aufgabe komplett. Wir wollen hier aber noch ein oder zwei weitere Betrachtungen anfügen.

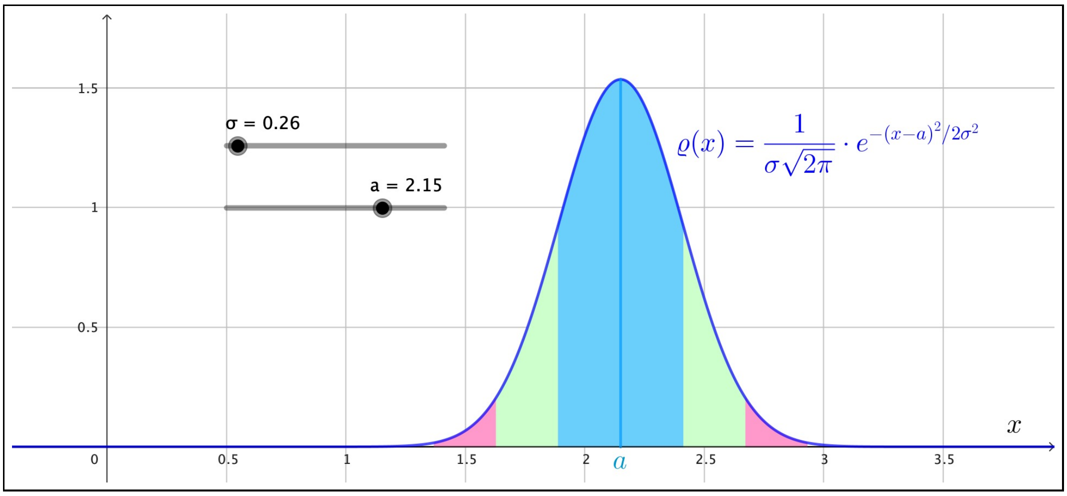
Zunächst wollen wir die Parameter A und λ durch die Standardabweichung σ ausdrücken:

Zunächst drücken wir λ durch σ aus und notieren damit unsere Verteilung unter Verwendung des Ausdrucks für A nochmals neu:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{2\sigma^2} \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

$$\varrho(x) = A\,e^{-\lambda(x-a)^2} = A\,e^{-\lambda(x-a)^2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}$$

(c) Nun können wir die normierte Normalverteilung mittels der Schieberegler für a und σ variieren:



(d) Das Integral über die ganze Funktion ergibt nun stets den Wert 1, unabhängig davon, wie σ und a eingestellt werden.

(e) Die drei Integrale hängen weder von σ, noch von a ab. D.h., die Wahrscheinlichkeit für einen Ort im Intervall $[a-\sigma; a+\sigma]$ ist immer gleich groß, nämlich $68.27\,\%$. Ebenso beträgt die Wahrscheinlichkeit für einen Ort in $[a-2\sigma; a+2\sigma]$ stets $95.45\,\%$ und für einen Ort in $[a-3\sigma; a+3\sigma]$ immer $99.73\,\%$.

Dies ist eine wichtige Eigenschaft der Normalverteilung. Und so verstehen wir auch, weshalb es eigentlich am sinnvollsten ist, die Normalverteilung unter Verwendung der Standardabweichung σ zu notieren.