Ergänzungen zur Quantenphysik

Schwarzkörperstrahlung: Eine neue Elementarkonstante

Das Zeitalter der Quantenmechanik brach mit der 1900 erschienenen Arbeit von **Max Planck** an. Planck versuchte, eine Theorie zu finden, mit der er die Strahlung eines **Schwarzen Körpers** (kurz **Schwarzkörperstrahlung**) erklären konnte. Jegliche Materie sendet elektromagnetische Strahlung resp. Energie aus, denn sie enthält winzige geladene Teilchen, die herumwirbeln und dabei beschleunigt werden, was gemäß der klassischen Elektrodynamik die Ursache für die Emission von Strahlung ist. Die Zusammensetzung der so emittierten Strahlung hängt von der mittleren Energie der Bewegung und daher letztlich von der Temperatur ab. So strahlt beispielsweise ein Stück Kohle, selbst wenn es kalt ist, unsichtbare infrarote Strahlung ab. Wird die Kohle aber erhitzt, sendet sie mehr Strahlung aus, die nun auch bis in das rote Ende des sichtbaren Spektrums hineinreicht. Die Kohle beginnt dann "rot glühend" zu leuchten.

Max Planck (1858 – 1947)

Die meisten Materialien *reflektieren* jedoch auch elektromagnetische Energie. Ein **Schwarzer Körper** wird daher als ein Objekt definiert, dessen Energieabstrahlung allein von der thermischen Bewegung seiner Ladungen bestimmt wird. Jede darauf *auftreffende* Strahlung muss absorbiert und darf nicht reflektiert werden – was den Namen des Effekts erklärt. (Allerdings darf der Begriff nicht zu wörtlich genommen werden. Auch die Sonnenoberfläche beispielsweise, bei der Reflexion keine Rolle spielt, ist ein Schwarzer Körper.)

Obwohl Kohle eine gute Näherung ist, bleibt die Herstellung eines echten Schwarzen Körpers ziemlich schwierig. Wir stellen uns ein Objekt vor, das im Innern ausgehöhlt ist, wobei dieser **Hohlraum** nur durch ein winziges Loch mit der Außenwelt verbunden ist. Jede Strahlung, die in das Loch eintritt, wird von der Innenwand der Höhlung sehr oft reflektiert, wobei sie jedes Mal Energie an das Objekt verliert. Von Bedeutung ist, dass keine reflektierte Strahlung sofort wieder durch das Loch entkommt. Andererseits enthalten alle Teile der inneren Oberfläche Ladungen, die sich in thermischer Bewegung befinden und dabei ständig elektromagnetische Energie absorbieren und wieder emittieren. Sie sind darüber hinaus im Gleichgewicht mit der elektromagnetischen Energie im Inneren des Hohlraums – Ladungen und Strahlung haben dieselbe Temperatur T. Der Anteil der Strahlung, der durch das Loch nach außen dringt, ist daher charakteristisch für die im Inneren herrschende Temperatur. Das Loch verhält sich somit wie ein Schwarzer Körper der Temperatur T.

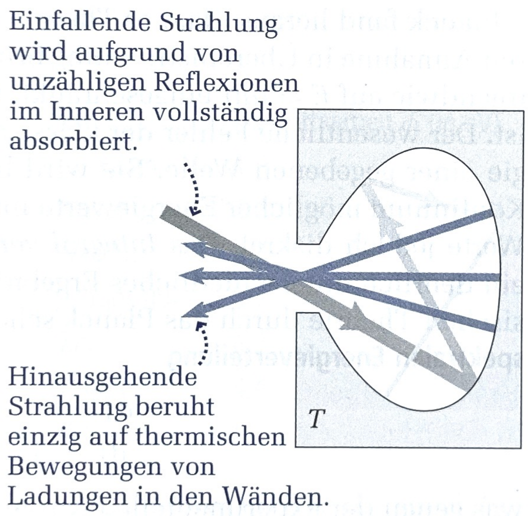
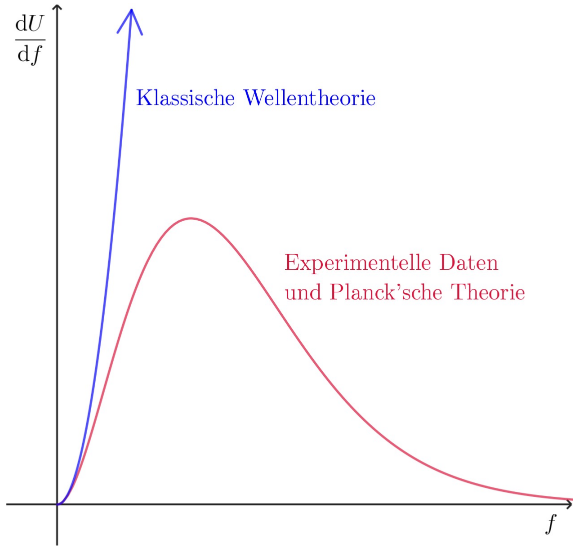


Abbildung 3.1: Strahlung verlässt einen Hohlraum, der als Schwarzer Körper fungiert, durch ein Loch

Experimente zeigen, dass die von einem Schwarzen Körper oder einem vergleichbaren Hohlraum abgestrahlte Energie bei kleinen Frequenzen gering ist. Wächst die Frequenz an, erreicht die Energie ein Maximum und fällt danach wieder gegen null ab. Dies wird durch die experimentell bestimmte Kurve rechts illustriert, in der die elektromagnetische Energie $\mathrm{d}U$ pro Frequenzintervall $\mathrm{d}f$ bei allen möglichen Frequenzen f aufgetragen ist. Wir sprechen von der **spektralen Energiedichte** $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}f}$. Diese Kurve sieht aber im Bereich hoher Frequenzen völlig anders aus als diejenige, die aus der klassischen *Theorie* folgt. Weil die klassische Theorie bei niedrigen Frequenzen richtig war, im Ultravioletten aber krass versagte – wie wir noch sehen werden – wurde diese Abweichung als **Ultraviolettkatastrophe** bezeichnet.



Natürlich war dies keine wirkliche Katastrophe. Die klassische Wellentheorie ist einfach unzureichend. Max Planck konnte das Problem mathematisch lösen, auch wenn er selber eingestehen musste nicht recht zu verstehen, wie er seine Lösung physikalisch begründen soll.

Die spektrale Energiedichte in der klassischen Theorie

Wir wollen in groben Zügen nachvollziehen, wie die klassische Physik zu ihrem (falschen!) Resultat gelangt, um hinterher zu verstehen, wo genau Planck seine Korrektur eingebaut hat, die auf die korrekte mathematische Beschreibung der gemessenen spektralen Energiedichte $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}f}$ führte.

Die gesamte im Hohlraum vorhandene elektromagnetische Strahlungsenergie bezeichnen wir mit U. Dann ist $\mathrm{d}U$, genauer: $\mathrm{d}U(f)$, die infinitesimale Menge an Strahlungsenergie im unendlich schmalen Frequenzbereich zwischen f und $f + \mathrm{d}f$.

$$\mathrm{d}U(f) = \text{Energie im Frequenzbereich von } f \text{ bis } f + \mathrm{d}f \tag{1}$$

Wir gehen davon aus, dass innerhalb des Hohlraums nur **stehende Wellen** existieren. Die Dimensionierung des Hohlraums legt fest, welche Wellenlängen resp. Frequenzen erlaubt sind – ganz ähnlich, wie das bei einem eingespannten Seil der Fall ist. Diese stehenden elektromagnetischen Wellen tragen gemäß der klassischen Elektrodynamik die Strahlungsenergie im Hohlraum.

Zwei Faktoren sind hier zu beachten: Zum einen bedeutet die Behandlung der Energie in Form von stehenden Wellen, dass es eine bestimmte Anzahl $\mathrm{d}N(f)$ von stehenden Wellen gibt, deren Frequenzen im Bereich von f bis $f + \mathrm{d}f$ liegen:

$$\mathrm{d}N(f) = \text{Anzahl der Wellen im Frequenzbereich von } f \text{ bis } f + \mathrm{d}f \tag{2}$$

Zum anderen sollte die Energie in einer Welle der Frequenz f einen vorhersagbaren Mittelwert $\overline{E(f)}$ haben – selbst wenn diese Energie aufgrund der ständigen Absorption und Emission schwanken mag:

$$\overline{E(f)} = \text{Mittlere erwartete Energie für eine Welle der Frequenz } f \tag{3}$$

Die Gesamtenergie im Frequenzbereich von f bis $f + \mathrm{d}f$ sollte damit dem Produkt

$$\mathrm{d}U(f) = \overline{E(f)} \cdot \mathrm{d}N(f) \tag{4}$$

entsprechen. Wir betrachten nun die beiden Faktoren separat.

$\overline{E(f)}$ – die mittlere Energie einer Welle der Frequenz f: Gerade als Erstes wollen wir repetieren, was wir bei der Betrachtung elektromagnetischer Wellen abschließend festgehalten hatten: Die Energie einer einzelnen Welle hängt gar nicht von der Frequenz ab, sondern nur von ihrer Amplitude. Das bedeutet, $\overline{E(f)}$ muss gemäß der klassischen Theorie für alle Frequenzen f gleich groß herauskommen.

In einem so lebhaften System wie einem Hohlraum, in dessen Wänden ständig elektromagnetische Energie absorbiert und emittiert wird, ist die Energie einer Welle eine Frage der **Wahrscheinlichkeit**.

Im Laufe des 19. Jahrhunderts bewährte sich das Dalton'sche Teilchenmodell – kurz: Materie besteht aus kleinen Teilchen – beim Verständnis von physikalischen und chemischen Prozessen immer mehr. Die Teilchen sollten bezüglich ihren Bewegungen den Gesetzen der Newton'schen Mechanik folgen. Da man es bei einem makroskopischen Körper aber stets mit abertausenden solcher Teilchen gleichzeitig zu tun hat, kann es hier nur eine Teilchenstatistik und keine exakte Aussage über das einzelne Teilchen geben. Der österreichische Theoretiker **Ludwig Boltzmann** (1844 – 1906) war entscheidend an der Entwicklung dieser **statistischen Mechanik** beteiligt. So gibt die sogenannte **Boltzmann-Verteilung** für ein System vieler "Objekte" – oft handelt es sich um Atome oder Moleküle, bei uns sind es nun elektromagnetische Oszillationen der Frequenz f – die Wahrscheinlichkeit an, dass ein gegebenes Objekt resp. ein gegebener Oszillator die Energie E besitzt:

$$P(E) = A \cdot e^{-E/k_\mathrm{B}T} \tag{5}$$

Dabei ist T die absolute Temperatur, A ein konstanter Vorfaktor, der lediglich dafür zu sorgen hat, dass die Gesamtwahrscheinlichkeit der Verteilung 1 $(= 100\,\%)$ beträgt, und k_B die **Boltzmann-Konstante** mit einem experimentell bestimmten Wert von:

$$k_\mathrm{B} = 1.381 \cdot 10^{-23}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$$

Wir erhalten die mittlere Energie $\overline{E}$ eines einzelnen Oszillators aus einer Mittelung all seiner möglichen Energiewerte. Dabei muss der Energiewert E jeweils mit der zugehörigen Auftretenswahrscheinlichkeit $P(E)$ gewichtet werden. Konkret heißt das, wir müssen alle Energiewerte E mit ihren Wahrscheinlichkeiten $P(E)$ multiplizieren, dann über alle solchen Produkte summieren und durch die Gesamtwahrscheinlichkeit dividieren:

$$\overline{E(f)} = \frac{\sum_E E \cdot P(E)}{\sum_E P(E)} = \frac{\sum_E E \cdot A\, e^{-E/k_\mathrm{B}T}}{\sum_E A\, e^{-E/k_\mathrm{B}T}} = \frac{\sum_E E \cdot e^{-E/k_\mathrm{B}T}}{\sum_E e^{-E/k_\mathrm{B}T}} \tag{6}$$

Wir sehen, wie sich der Faktor A herauskürzt. Er spielt somit keine Rolle.

(6) kann so aber noch nicht stimmen, denn die Energie E nimmt nach dem klassischen Bild keine diskreten Werte an (also voneinander getrennte Einzelwerte). Vielmehr bilden die erlaubten Energiewerte eines Oszillators ein Kontinuum. Das bedeutet, es ist über die Energiewerte zu integrieren anstatt zu summieren:

$$\overline{E(f)} = \frac{\int_0^\infty E \cdot e^{-E/k_\mathrm{B}T}\,\mathrm{d}E}{\int_0^\infty e^{-E/k_\mathrm{B}T}\,\mathrm{d}E} \tag{7}$$

Das Integral im Zähler ist gleich $k_\mathrm{B}T \cdot \int_0^\infty e^{-E/k_\mathrm{B}T}\,\mathrm{d}E$. Dies folgt aus einer partiellen Integration. Das verbleibende Integral kürzt sich mit dem Nenner weg und wir erhalten:

$$\overline{E(f)} = k_\mathrm{B}T \tag{8}$$

Dieser Wert ist, wie zu Beginn erläutert, unabhängig von der Frequenz f. Die mittlere Energie jeder Welle beträgt also $k_\mathrm{B}T$, egal bei welcher Frequenz f.

$\mathrm{d}N(f)$ – die Anzahl der Wellen im Frequenzbereich von f bis $f + \mathrm{d}f$: Die Größe $\mathrm{d}N(f)$ ist klassisch und quantenmechanisch dieselbe und trägt somit nichts bei zum Unterschied zwischen alter und neuer Theorie. Sie beschreibt in Abhängigkeit des Hohlraumvolumens die Anzahl der Wellen innerhalb des Frequenzbereichs von f bis $f + \mathrm{d}f$.

Dabei geht es um die Frage, welche Wellenlängen und damit Frequenzen f denn aufgrund der Hohlraumabmessungen überhaupt in diesem existieren können und in welcher Zahl sie dann vorhanden sind. Wie schon früher erwähnt, ist dieses Kriterium vergleichbar mit einem Seil einer bestimmten Länge, in die eben nur bestimmte Wellenlängen hineinpassen und stehende Wellen bilden können. Hier muss allerdings dreidimensional gedacht werden.

Da es bei dieser Überlegung aber keinen Unterschied zwischen klassischer und quantenmechanischer Theorie gibt, werfen wir an dieser Stelle nur einen Blick auf das Resultat – mit dem ausführlichen Gedankengang werden wir uns zu einem späteren Zeitpunkt beschäftigen.

Hat der Hohlraum das Volumen V, so ist die Anzahl der Wellen mit Frequenz zwischen f und $f + \mathrm{d}f$ gegeben durch:

$$\mathrm{d}N(f) = \frac{8\pi V}{c^3}\, f^2 \,\mathrm{d}f \tag{9}$$

Offenbar gilt: Je größer die Frequenz f, desto mehr Wellen beinhaltet das infinitesimale Frequenzintervall zwischen f und $\mathrm{d}f$. Es gibt eine quadratische Abhängigkeit.

Setzen wir die beiden Teile zusammen, so landen wir bei der klassischen Vorhersage für die im Frequenzschritt $\mathrm{d}f$ enthaltene Strahlungsenergie $\mathrm{d}U(f)$:

$$\mathrm{d}U(f) = \overline{E(f)} \cdot \mathrm{d}N(f) = k_{\mathrm{B}}T \cdot \frac{8\pi V}{c^3}\, f^2 \,\mathrm{d}f \tag{10}$$

Daraus folgt für die spektrale Energiedichte:

$$\textbf{Spektrale Energiedichte klassisch:} \qquad \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}f} = k_{\mathrm{B}}T \cdot \frac{8\pi V}{c^3}\, f^2 \tag{11}$$

Irgendetwas kann hier aber eben nicht stimmen, denn diese quadratische Funktion divergiert, da f über alle Grenzen hinweg ansteigen darf. Hohe Frequenzen sind ja nicht verboten. Wäre dies richtig, würden alle Materialien unendliche hohe Leistung abstrahlen – eine weitere Begründung für den etwas drastisch gewählten Begriff der **Ultraviolettkatastrophe**.

Ein kurzes historisches Zwischenspiel

Wir wollen im nächsten Abschnitt sehen, wie sich Plancks Theorie von der klassischen unterscheidet. Zuvor seien hier aber Plancks eigene Worte zitiert, die zeigen, wie sehr er als Theoretiker um die Sache gerungen hat. Hier sein späterer Kommentar zur Einführung der "Hilfskonstante" h, für die er selber zunächst keine rechte Existenzberechtigung erkannte:

"Es (die Einführung von h) war eine regelrechte Verzweiflungstat.
Sechs Jahre hatte ich mich mit der Theorie des schwarzen Körpers herumgeschlagen.
Ich hatte das Problem als grundlegend erkannt und kannte auch die Antwort.
Nun musste ich, koste es, was es wolle, (...) noch eine theoretische Erklärung dafür finden."

Die Antwort kannte Planck, weil die spektrale Energiedichte in Experimenten bereits recht genau ausgemessen worden war. Es fehlte zu diesem Zeitpunkt an einer passenden Theorie dazu. Planck wollte diese Theorie aus einer Kombination von Elektrodynamik und Thermodynamik zusammensetzen.

Die spektrale Energiedichte nach Planck

Bevor wir weitermachen, sei darauf hingewiesen, dass Planck seine neue Quantisierungsmethode nicht wie wir gleich auf die elektromagnetische Strahlung im Hohlraum anwandte, sondern auf die Ladungen, die in den Wänden oszillieren. Diese "Resonatoren", wie er sie nannte, können ihre Energie nur in diskreten Schritten ändern. Das war seine für ihn selber unerklärbare Annahme, die mit der Einführung von h einherging.

Einstein zeigte später, dass diese Sichtweise unter der Voraussetzung eines thermischen Gleichgewichts zwischen Wänden und Strahlung im Hohlraum gleichbedeutend ist mit einer Quantisierung der Strahlung, der auch unser Interesse gilt.

Planck fand heraus, dass er Theorie und experimentelle Daten mittels einer kuriosen Annahme in Übereinstimmung bringen konnte: Die mittlere Energie $\overline{E(f)}$ bei der Frequenz f ist irgendwie auf die diskreten Einzelwerte $E = nhf$ eingeschränkt, wobei n eine ganze Zahl und h eine Konstante ist. Der Fehler der klassischen Wellentheorie liegt also in der mittleren Energie einer gegebenen Welle – die Anzahl $\mathrm{d}N(f)$ der Wellen oder Oszillationen im Frequenzbereich von f bis $f + \mathrm{d}f$ ließ Planck nämlich gegenüber der klassischen Theorie unverändert.

In der klassischen Theorie wird die mittlere Energie $\overline{E(f)}$ bestimmt, indem wir über ein angenommenes Kontinuum möglicher Energiewerte E integrieren. Gemäß Plancks Annahme sind diese Werte aber eben diskret – d.h., es sind voneinander getrennte Einzelwerte. Das Integral in (7) muss daher zur Summe in (6) zurückverwandelt werden, wobei die einzelnen Energiewerte eben durch

$$E_n = nhf \qquad \text{mit} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{12}$$

gegeben sind. Damit folgt:

$$\overline{E(f)} = \frac{\sum_n E_n \cdot P(E_n)}{\sum_n P(E_n)} = \frac{\sum_n nhf \cdot e^{-nhf/k_\mathrm{B}T}}{\sum_n e^{-nhf/k_\mathrm{B}T}} \tag{13}$$

Wir brauchen uns hier nicht um die Berechnung dieses Bruchs zu kümmern, sondern nehmen einfach das Resultat zur Kenntnis:

$$\overline{E(f)} = \frac{hf}{e^{hf/k_\mathrm{B}T} - 1} \tag{14}$$

Dies lässt sich, wie schon in der klassischen Theorie, mit (9) kombinieren, um die im Hohlraum enthaltene Energie $\mathrm{d}U(f)$ im Frequenzbereich von f bis $f + \mathrm{d}f$ zu erhalten:

$$\mathrm{d}U(f) = \overline{E(f)} \cdot \mathrm{d}N(f) = \frac{hf}{e^{hf/k_\mathrm{B}T} - 1} \cdot \frac{8\pi V}{c^3}\, f^2\, \mathrm{d}f \tag{15}$$

Damit folgt als Schlussresultat der Planck'schen Theorie:

$$\textbf{Spektrale Energiedichte Planck:} \qquad \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}f} = \frac{hf}{e^{hf/k_\mathrm{B}T} - 1} \cdot \frac{8\pi V}{c^3}\, f^2 \tag{16}$$

Da der Exponentialterm im Nenner im Grenzfall kleiner Frequenzen durch

$$e^{hf/k_\mathrm{B}T} \approx 1 + \frac{hf}{k_\mathrm{B}T} \tag{17}$$

approximiert werden kann, können wir sofort zeigen, dass die klassische Energiedichte in (11) und diejenige nach Planck in (16) bei kleinen Frequenzen übereinstimmen:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}f}\right)_\mathrm{Planck} &= \frac{hf}{e^{hf/k_\mathrm{B}T} - 1} \cdot \frac{8\pi V}{c^3}\, f^2 \\
&\approx \frac{hf}{1 + \frac{hf}{k_\mathrm{B}T} - 1} \cdot \frac{8\pi V}{c^3}\, f^2 = \frac{hf}{\frac{hf}{k_\mathrm{B}T}} \cdot \frac{8\pi V}{c^3}\, f^2 = k_\mathrm{B}T \cdot \frac{8\pi V}{c^3}\, f^2 = \left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}f}\right)_\mathrm{klassisch}
\end{aligned}$$

Bei größeren Frequenz sorgt der Exponentialterm im Nenner hingegen dafür, dass die spektrale Energiedichte $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}f}$ gegen null geht.

Abschliessende Bemerkungen

Wir nehmen vor allem zur Kenntnis: Die für Planck ganz unverständliche **Quantisierung** der erlaubten Energiewerte in (12) ist maßgeblich dafür verantwortlich, dass sich die theoretische Voraussage exzellent mit den experimentellen Daten deckt.

Der Wert, den Planck für h angegeben hat und der heute als **Planck'sches Wirkungsquantum** (oder auch als **Planck'sche Konstante**) bezeichnet wird, beträgt heute:[1]

$$h = 6.626\,070\,15 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$$

Natürlich handelt es sich um den Faktor, der Plancks theoretische Kurve an die experimentelle Kurve anpasst. Es ist zwar eine interessante Frage, warum er ihn nicht herleiten konnte, doch von größerer Bedeutung ist, dass es überhaupt *möglich* war, die Kurve an die Messungen anzupassen. Obwohl eine Veränderung von h die spektrale Energiedichte bei allen Frequenzen ändert, würde das die Form selbst nicht verändern. Wäre Plancks Annahme rein willkürlich, dann wäre es ein bizarrer Zufall, dass diese Form die experimentelle Kurve genau trifft. Im Nachhinein wissen wir, dass das Planck'sche Wirkungsquantum nicht abgeleitet werden *kann*, denn es ist (ähnlich wie die Gravitationskonstante G) eine der grundlegendsten Naturkonstanten. Sie alle können nur experimentell bestimmt werden. Für seine Entdeckung wurde Planck 1918 mit dem Nobelpreis ausgezeichnet.

Plancks spektrale Energieverteilung ist die wesentliche Verbindung zwischen der absoluten Temperatur T und der elektromagnetischen Strahlung. Obwohl Planck seine Formel auf der Annahme $E = nhf$ begründete – was bereits nahelegt, dass sich Strahlung verhält, als bestünde sie aus einer großen Zahl von Teilchen der Energie hf – zögerte er, die Schwelle zur neuen Physik zu überschreiten. Andere trugen die Fackel der Revolution weiter.

Quellenangabe

Obige Ausführungen entstammen dem Abschnitt 3.1 und dem Anhang C aus dem Buch:

Harris, Randy: *Moderne Physik*, Lehr- und Übungsbuch (2. Aufl.), Pearson (München 2013).

Die Inhalte wurden einerseits marginal ergänzt oder verkürzt, um die verständliche Lektüre auf gymnasialem Niveau zu unterstützen, und andererseits ineinander verwoben, sodass aus Haupttext und Anhang ein einziger Text mit rotem Faden entstanden ist.

[1] Dieser Wert gilt seit 2019 und wird sich voraussichtlich nicht mehr verändern, denn in der Revision des Internationalen Einheitensystems SI im Jahr 2019 wurde ein Paradigmenwechsel vorgenommen. Nun sind die Werte von ein paar grundlegenden Konstanten fix festgelegt – darunter eben h – und die weiteren Einheiten werden durch Zusammensetzung dieser Konstanten definiert.