Übersicht zu den trigonometrischen Winkelfunktionen

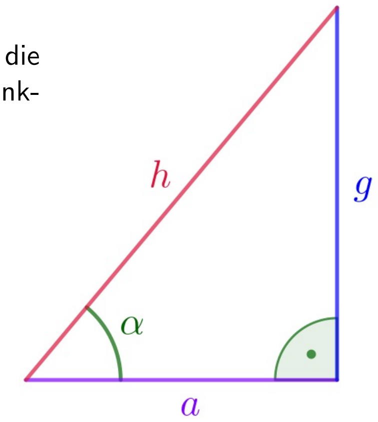
Die Definition der Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck

Im rechtwinkligen Dreieck werden durch Vorgabe eines spitzen Winkels α die **Seitenverhältnisse** eindeutig festgelegt. Damit definieren wir die Winkelfunktionen für Winkel $0° \leq \alpha \leq 90°$:

$$\sin x_\mathrm{b} := \frac{g}{h} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos x_\mathrm{b} := \frac{a}{h} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan x_\mathrm{b} := \frac{g}{a} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$



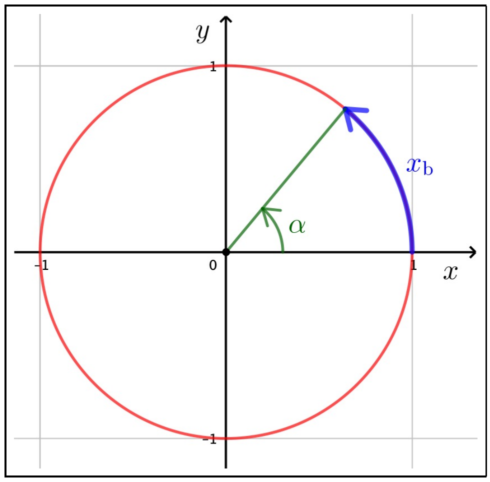
Das Bogenmass – die Bogenlänge auf dem Einheitskreis

Der Winkel α wird von der positiven x-Achse aus gemessen. Dabei steht $\alpha > 0$ für eine Winkelabtragung im Gegenuhrzeigersinn, $\alpha < 0$ hingegen für eine im Uhrzeigersinn.

Zu jedem Winkel α gehört eine eindeutige **Bogenlänge** x_b auf dem Einheitskreis (siehe Grafik). Für die Umrechnung zwischen diesem **Bogenmass** und dem altbekannten Gradmass gilt:

$$\pi\,(\mathrm{rad}) \mathrel{\widehat{=}} 180°$$

Angaben im Bogenmass x_b können zur Klarstellung, dass es sich um eine Bogenlänge auf dem Einheitskreis handelt, mit der Hilfseinheit **Radiant** (rad) versehen werden. Oftmals lässt man diese Einheit aber weg.



Die Definition der Winkelfunktionen am Einheitskreis

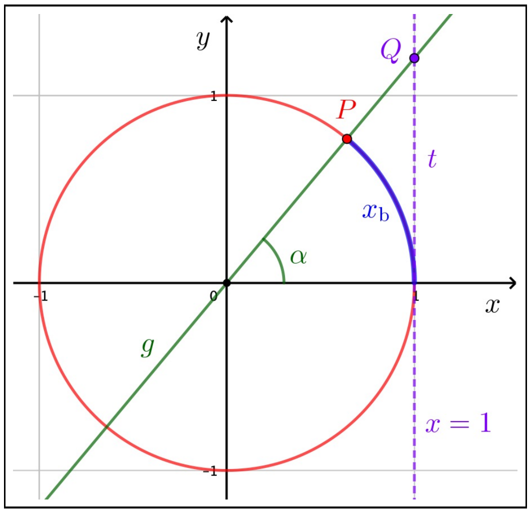
Durch den Winkel α resp. den Bogen x_b wird ein Punkt P auf dem Einheitskreis eindeutig festgelegt. Ebenso schneidet die zugehörige Richtungsgerade g die Tangente $t : x = 1$ in einem eindeutig festgelegten Punkt Q, sofern nicht gerade g mit der y-Achse zusammenfällt.

Mittels dieser durch die Bogenlänge x_b eindeutig festgelegten Punkte P und Q definieren wir die Winkelfunktionen neu für beliebige Bogenlängen $-\infty < x_0 < +\infty$:

$$\sin x_\mathrm{b} := y\text{-Koordinate des Punktes } P$$

$$\cos x_\mathrm{b} := x\text{-Koordinate des Punktes } P$$

$$\tan x_\mathrm{b} := y\text{-Koordinate des Punktes } Q$$



Diese Definitionen am Einheitskreis stimmen im Bereich zwischen $0° \leq \alpha \leq 90°$ resp. $0 \leq x_\mathrm{b} \leq \frac{\pi}{2}$ mit den Definitionen der Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck überein.

N.B.: Da wir die Definition der Winkelfunktionen in einem x-y-Koordinatensystem vornehmen, wird die Bogenlänge hier zur klaren Unterscheidung mit x_b bezeichnet. Auf der Rückseite steht x aber für die Bogenlänge.

Graphen und spezielle Werte von Sinus- und Cosinusfunktion

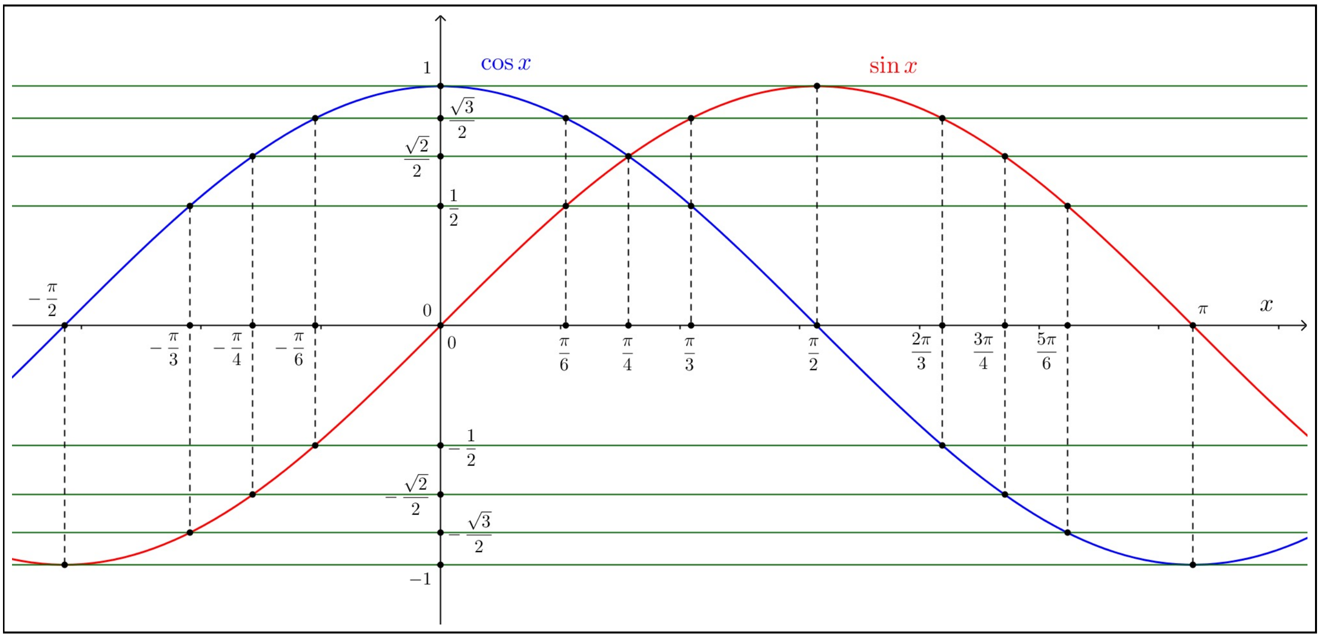


Tabelle der speziellen Werte

α	x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
$0°$	0	0	1	0
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0	undef.

Periodizitäten

$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$ 2π-periodisch

$\cos(x \pm 2\pi) = \cos x$ 2π-periodisch

$\tan(x \pm \pi) = \tan x$ π-periodisch

Symmetrieeigenschaften

$\sin(-x) = -\sin x$ ungerade

$\cos(-x) = \cos x$ gerade

$\tan(-x) = -\tan x$ ungerade

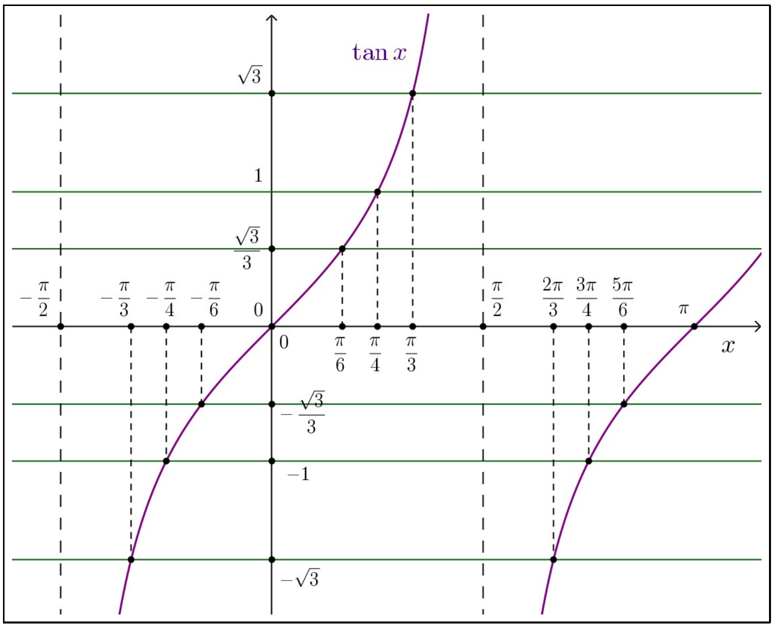
Trigonometrischer Pythagoras

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Beziehung zwischen den Funktionen

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Graph und spezielle Werte der Tangensfunktion



Additionstheoreme

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

Doppelwinkelformeln

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$