Übungen zur Quantenphysik

Serie 1: Wellen, Zahlenkörper und Grundoperationen in $\mathbb{C}$

1. *Das mathematische Verständnis der elektromagnetischen Wellen – Teil I*

   Im Text *Klassische Elektrodynamik & elektromagnetische Wellen* wird gezeigt, wie wir uns eine **elektromagnetische Welle** vorstellen können. Die mathematische Beschreibung einer solchen Welle ist eine Lösung der **Maxwell-Gleichungen** für das Vakuum (also ohne elektrische Ladungen oder Ströme). In dieser Aufgabe wollen wir diese mathematische Beschreibung genauer verstehen. Dabei geht es erstens um eine Repetition unseres Wissens zu **Sinusfunktionen** aus der Mathematik und zweitens um eine Repetition unseres physikalischen Wissen über **Wellen** und die damit verbundenen Grössen.

   (a) Die **allgemeine Sinusfunktion** kann wie folgt notiert werden:

   $$f(x) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - C)\right) + D \qquad \text{mit} \quad A, \lambda, C, D \in \mathbb{R} \tag{1}$$

   Wenn wir $A = 1$, $\lambda = 2\pi$, $C = 0$ und $D = 0$ einsetzen, erhalten wir die normale (= unmodifizierte) Sinusfunktion $f(x) = \sin x$.

   Wie modifizieren die vier Parameter A, λ, C und D den Graphen dieser normalen Sinusfunktion? Welche geometrischen Auswirkungen haben sie auf ihn?

   Tipp: Kreiere ein **GeoGebra**-File mit vier Schiebereglern für die vier Parameter und definiere damit die allgemeine Sinusfunktion. So kannst du nachher die Parameter variieren und direkt sehen, welche graphischen Konsequenzen dies hat. GeoGebra werden wir im Rahmen des EFs sehr häufig verwenden. Es empfiehlt sich, den Umgang damit bei jeder Gelegenheit zu trainieren.

   (b) In der Physik treten Sinusfunktionen auf, wenn wir Wellen beschreiben. Dann bezeichnen wir A als **Amplitude** und λ als **Wellenlänge**. Wenn wir den Parameter C linear von der **Zeit** t abhängen lassen, also $C = c \cdot t$, so erhalten wir eine gleichförmig mit der **Geschwindigkeit** c nach rechts laufende Welle (den Parameter D brauchen wir in aller Regel nicht und setzen ihn gleich 0):

   $$f(x,t) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct)\right) \tag{2}$$

   Diese Funktion ordnet jeder Stelle x zu jedem Zeitpunkt t einen Funktionswert $f(x,t)$ zu.

   Baue einen weiteren Schieberegler t in dein GeoGebra-File ein, sodass du die Sinuskurve mit einer bestimmten Geschwindigkeit laufen lassen kannst.

   (c) Nun ist uns obige Notationsweise für $f(x,t)$ zu umständlich. Vielmehr wollen wir schreiben:

   $$f(x,t) = A \cdot \sin(kx - \omega t) \tag{3}$$

   i. Wie hängen die neuen Parameter Wellenzahl k und Kreisfrequenz ω mit den bisherigen Parametern λ und c zusammen? $k = \ldots$? $\omega = \ldots$?

   ii. Zeige, dass die Wellengeschwindigkeit durch $c = \frac{\omega}{k}$ gegeben ist.

   (d) Für sämtliche Arten von Wellen gilt die von uns als **Wellenbeziehung** bezeichnete Gleichung:

   $$c = \lambda \cdot f \tag{4}$$

   Auf agertsch.ch findet sich das Kapitel 8 aus dem Akustik-Skript. In den ersten beiden Abschnitten 8.1 und 8.2 wird dort beschrieben, woher diese Wellenbeziehung kommt.

   Studiere diese Abschnitte, um dein Verständnis für die Wellenbeziehung aufzufrischen.

   N.B.: Der Rest dieses Kapitels 8 enthält lauter Dinge, die für das Verständnis der Aufgaben (b) und (c) hier ganz nützlich sein könnten...

Nachwort zu Aufgabe 1: Nach diesen Ausführungen verstehen wir besser, weshalb ein elektrisches Feld, das durch

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y(x,t) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad E_y(x,t) = E_0 \cdot \sin(kx - \omega t) \tag{5}$$

gegeben ist, die elektrische Komponente der em-Welle beschreibt, wie sie auf Seite 3 im Text *Klassische Elektrodynamik & elektromagnetische Wellen* veranschaulicht wird: Entlang der x-Achse bewegt sich das in y-Richtung schwingende elektrische Feld.

In Teil II dieser Aufgabe (in einer späteren Übungsserie) wollen wir dann auch noch verifizieren, dass die Sinusfunktion

$$E_y(x,t) = E_0 \cdot \sin(kx - \omega t) \tag{6}$$

eine Lösung der **partiellen Differentialgleichung**

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \cdot \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \tag{7}$$

ist. Dazu benötigen wir aber definitiv mehr Vorwissen über Differentialgleichungen und diese komischen ∂-Zeichen, die hier auftreten...

2. *Der kleinstmögliche Körper*

Gemäss der Definition eines Körpers im Skript zu den Komplexen Zahlen auf Seite 5 muss jeder Körper mindestens zwei verschiedene Elemente enthalten, nämlich 0 und 1. Weniger geht nicht! Diese zwei essentiellen Neutralelemente – eines für die Addition, eines für die Multiplikation – müssen auf jeden Fall im Körper enthalten sein.

Frage: Kann die Menge $\{0,1\}$ ohne Hinzufügen weiterer Elemente zu einem Körper gemacht werden?

Die Antwort lautet: Ja, wenn wir Addition und Multiplikation wie folgt für alle möglichen Fälle definieren:

Addition:	$0+0 := 0$	$0+1 := 1$	$1+0 := 1$	$1+1 := 0$
Multiplikation:	$0 \cdot 0 := 0$	$0 \cdot 1 := 0$	$1 \cdot 0 := 0$	$1 \cdot 1 := 1$

Zeige, dass $\{0,1\}$ zusammen mit der so definierten Addition und Multiplikation tatsächlich einen Körper bildet. D.h., überprüfe die Gültigkeit der neun Körperaxiome für diesen kleinstmöglichen Körper.

Interessant ist insbesondere die Frage, was die negativen Elemente von 0 und 1 sind und was das inverse Element von 1 ist, was man also unter (-0), (-1) und 1^{-1} zu verstehen hat.

3. *Elementares Rechnen mit komplexen Zahlen*

Es seien $z_1 = 3 - 4\mathrm{i}$, $z_2 = 2 + \mathrm{i}$ und $z_3 = 8\mathrm{i}$. Bestimme:

i. $z_1 - 4z_2 + z_3$	ii. $2z_2 - (8z_2 + \mathrm{i}z_3)$	iii. $z_1 z_2 z_3$
iv. $z_1^2 + z_2^2$	v. $\mathrm{Re}(z_1 + z_3)$	vi. $\mathrm{Im}(z_2 z_3)$