Übungen zur Quantenphysik

Serie 11: Erhaltungssätze und Operatoren

1. *Erhaltungssätze der klassischen Mechanik*

   Auf einer Luftkissenbahn stößt ein Schlitten der Masse m_1 mit Geschwindigkeit v_1 gegen einen anfänglich ruhenden Schlitten der Masse m_2.

   (a) *Fall 1: Komplett elastischer Stoß*

   Beim Zusammenprall soll gar keine kinetische Energie verloren gehen. Das bedeutet, die mechanische Gesamtenergie bleibt erhalten.

   Wie schnell sind die beiden Schlitten nach dem Aufprall? Unter welchen Voraussetzung wird Schlitten 1 beim Aufprall "reflektiert"?

   Zum Vorgehen: Die Geschwindigkeiten v_1' und v_2' nach dem Stoß sind die beiden Unbekannten. Um sie zu bestimmen benötigen wir zwei Gleichungen: Energie- **und** Impulserhaltung!

   Bemerke also: Die Energieerhaltung alleine legt hier keine eindeutige Lösung des Problems fest! Dies geschieht erst in Kombination mit der Impulserhaltung.

   Hilfsfrage: Woran werden wir mathematisch erkennen, dass der Schlitten 1 reflektiert wurde?

   N.B.: Die kinetische Energie eines Körpers mit Masse m und Geschwindigkeit v beträgt $E_{\text{kin}} = \frac{mv^2}{2}$.

   (b) *Fall 2: Vollständig inelastischer Stoß*

   Nun wollen wir umgekehrt davon ausgehen, dass beim Zusammenstoß der beiden Schlitten maximal viel mechanische Energie vernichtet wird. Das ist genau dann der Fall, wenn die Schlitten aneinander kleben bleiben und eine gemeinsame Geschwindigkeit $v' = v_1' = v_2'$ aufweisen.

   Berechne nun die Geschwindigkeit nach dem Stoß.

2. *Integralübungen zum Warmhalten*

   (a) Berechne die folgenden Integrale mittels **partieller Integration**:

   (a) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} x\sin(3x)\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_7^{15} \sqrt{2x-5}\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int_1^2 x^7 \ln x\,\mathrm{d}x$

   (d) $\displaystyle\int_{5\pi}^{8\pi} \sin\left(\frac{x}{6}-\frac{2\pi}{3}\right)\mathrm{d}x$ (e) $\displaystyle\int_0^6 \frac{2}{\sqrt{\frac{x}{3}+\frac{1}{4}}}\,\mathrm{d}x$ (f) $\displaystyle\int_0^6 \frac{2x}{\sqrt{\frac{x}{3}+\frac{1}{4}}}\,\mathrm{d}x$

   (b) Die Stammfunktion der Arcussinusfunktion ist gegeben durch:

   $$\int \arcsin x\,\mathrm{d}x = x\,\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

   Berechne damit:

   $$\int_1^2 \arcsin\left(1-\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x$$

3. *Rund um Operatoren*

Im Griffiths haben wir nun den Begriff des **Operators** kennengelernt. Dieser ist stets als *Anweisung zur Modifikation einer Funktion* zu verstehen. Das bedeutet, Operatoren verändern die dahinter stehende Funktion auf eine bestimmte Art und Weise. Zur besseren Unterscheidung von normalen Variablen werden Operatoren oft mit einem Hütchen gekennzeichnet.

Z.B. könnte ich einen Operator $\widehat{a}$ definieren, der zur Funktion f auf die er wirkt, einfach 2 hinzu addiert:

$$\widehat{a}f(x) := f(x) + 2$$

Ober ich könnte einen Operator $\widehat{b}$ definieren, der eine Funktion mit dem Faktor 2 multipliziert:

$$\widehat{b}f(x) := 2 \cdot f(x)$$

Durch Anwendung eines Operators wird aus einer bisherigen Funktion f also einfach eine neue Funktion $\widehat{a}f$ erzeugt.

Der Ortsoperator $\widehat{x}$ ist recht vergleichbar mit obigem Multiplikationsoperator $\widehat{b}$:

$$\widehat{x}f(x) := x \cdot f(x)$$

Anders sieht es mit dem Impulsoperator $\widehat{p}$ aus. Hierbei handelt es sich nämlich um einen sogenannten **Differentialoperator**, der die Funktion nach dem Ort ableitet:

$$\widehat{p}f(x) := \frac{h}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x} f(x) = \frac{h}{\mathrm{i}}\frac{\partial f}{\partial x}$$

(a) Griffiths sagt, dass sich jede klassische mechanische Variable aus Ort x und Impuls $p = mv$ zusammensetzen lässt. Er zeigt das Beispiel der kinetischen Energie:

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$$

Dem entsprechend kann zu jeder klassischen Größe ein Operator angegeben werden, der sich aus Orts- und Impulsoperator zusammensetzt.

Wenn wir nun von einem Teilchen in Zustand Ψ die Standardabweichung der kinetischen Energie bestimmen möchten, so brauchen wir dafür nicht nur $\langle T \rangle$, sondern auch $\langle T^2 \rangle$.

Wie sieht denn der quantenmechanische Operator $\widehat{T^2}$ aus?

(b) Als **Kommutator** zweier Operatoren $\widehat{A}$ und $\widehat{B}$ definieren wir den Ausdruck

$$[\widehat{A}, \widehat{B}\,] := \widehat{A}\,\widehat{B} - \widehat{B}\,\widehat{A}$$

Ob zwei physikalische Größen A und B in einem Zustand $\Psi(x,t)$ gleichzeitig messbar sind, hängt davon ab, ob ihre beiden Operatoren $\widehat{A}$ und $\widehat{A}$ miteinander**vertauschen**. Damit meint man, dass ihr Kommutator verschwindet.

Zeige, dass der Kommutator des Orts- und des Impulsoperators nicht gleich 0 ist und dass somit Ort und Impuls eines quantenmechanischen Zustandes Ψ nicht gleichzeitig gemessen werden können.

Hinweis 1: Operatoren ergeben für sich alleine keinen echten Sinn. Sie müssen schon auf eine Funktion f angewendet werden. Benutze also eine beliebige Funktion $f(x,t)$, auf die du den Kommutator $[\widehat{x}, \widehat{p}]$ anwendest.

Hinweis 2: Der Kommutator $[\widehat{x}, \widehat{p}]$ ist selber wieder ein Operator. Wie lautet er?