Übungen zur Quantenphysik

Serie 2: Erste DGLs & Planck'sches Strahlungsgesetz

1. *Integrieren $\widehat{=}$ Lösen von linearen, inhomogenen Differentialgleichungen 1. Ordnung*

   Als **Stammfunktion** einer Funktion $r(x)$ bezeichnen wir jede Funktion $f(x)$, deren Ableitung durch $r(x)$ gegeben ist, also: $f'(x) = r(x)$.

   Das Aufspüren einer solcher Stammfunktionen ist in der **Integralrechnung** eine wichtige Fähigkeit. $r(x)$ muss nicht ab-, sondern stattdessen "aufgeleitet" werden. Man sagt: "Es wird über r **integriert**".

   Jede derartige Integration entspricht im Prinzip dem Lösen einer **linearen, inhomogenen Differentialgleichung 1. Ordnung** mit Koeffizienten $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$ (vgl. Skript *Allgemeines zu Differentialgleichungen*, Gleichung (1) auf Seite 2 oben):

   $$f'(x) = r(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = ??$$

   Dabei ist die **Störfunktion** $r(x) \neq 0$ die Funktion, die es aufzuleiten gilt.

   Obige Differentialgleichung alleine legt die gesuchte Funktion $f(x)$ noch nicht eindeutig fest. Wir benötigen *genau eine* **Randbedingung (RB)**, denn es handelt sich um eine DGL *1. Ordnung*. Die allgemeine Lösung lautet jeweils $f(x) + C$, wobei C für irgendeine **Integrationskonstante** steht, die beim Ableiten von $f(x)$ wieder wegfällt und die folglich für $r(x)$ keine Rolle spielt. Erst durch die Randbedingung wird der Wert von C eindeutig festgelegt.

   Beispiel: Differentialgleichung: $f'(x) = -4x^2$ mit Randbedingung: $f\big(\sqrt{3}\big) = 2\sqrt{3}$.

   Allgemeine Lsg. der DGL: $f(x) = -\frac{4}{3}\,x^3 + C$ denn so ist: $f'(x) = \big[-\frac{4}{3}\,x^3 + C\big]' = -4x^2$.

   Erfüllung der RB: $f\big(\sqrt{3}\big) = -\frac{4}{3}\big(\sqrt{3}\big)^3 + C = -4\sqrt{3} + C \overset{!}{=} 2\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad C = 6\sqrt{3}$

   $\Rightarrow$ eindeutige Lösung des Problems: $f(x) = -\frac{4}{3}\,x^3 + 6\sqrt{3}$

   Tipp – Kontrolle: Nachdem du meinst, die allgemeine Lösung aufgespürt zu haben, solltest du sie zur Kontrolle unbedingt nochmals ableiten und dich von ihrer Richtigkeit überzeugen. Ableiten ist in aller Regel deutlich einfacher als Integrieren. Nutze das aus um sicher zu sein!

   Finde nun in gleicher Weise die eindeutigen Lösungen zu den folgenden DGLs mit RB und lasse dir ihre Graphen in **GeoGebra** aufzeichnen:

   (a) $f'(x) = 8x^3 + 1$ mit: $f(-1) = 0$.

   (b) $f'(x) = \sqrt{x}$ mit: $f(4) = \frac{13}{3}$.

   (c) $f'(x) = \frac{1}{x}$ mit: $f(-\frac{1}{e^2}) = 0$.

   Bemerkung: Die Funktion $\ln x$ mit Ableitung $\frac{1}{x}$ erlaubt nur positive Werte von x. Allerdings können wir sie mittels dem Betrag von x sinnvoll für $x < 0$ erweitern: $\ln|x|$. Dabei bleibt die Ableitung $\frac{1}{x}$ genau gleich, erhält also keine Betragsstriche.

   (d) $f'(x) = 4\cos(2x)$ mit: $f(\frac{\pi}{8}) = 2\sqrt{2}$.

   Achtung! Berücksichtige, dass bei der Ableitung von $\sin(2x)$ oder $\cos(2x)$ aufgrund der Kettenregel eine innere Ableitung als zusätzlicher Faktor entsteht.

2. *Folgerungen aus der spektralen Energiedichte Plancks*

   Die Zusammensetzung der elektromagnetischen Strahlung in einem Hohlraum hängt von dessen absoluter Temperatur T ab und wird durch die von Planck gefundene spektrale Energiedichte

   $$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}f} = \frac{hf}{e^{hf/k_\mathrm{B}T} - 1} \cdot \frac{8\pi V}{c^3} \cdot f^2 \tag{1}$$

   beschrieben. Diese Formel beschreibt, wie viel Strahlungsenergie $\mathrm{d}U$ **pro Frequenzintervall** $\mathrm{d}f$ (genauer: zwischen f und $f + \mathrm{d}f$) vorhanden ist.

   (a) Mitunter ist es aber häufig besser, diese spektrale Energieverteilung als Strahlungsenergie **pro Wellenlängenintervall** $\mathrm{d}\lambda$ auszudrücken, also $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\lambda}$. Das wollen wir hier tun.

   Die Aufgabe soll uns zeigen, das der rechnerische Umgang mit infinitesimalen Größen tatsächlich vergleichsweise einfach ist.

   i. Um ganz sauber mit den infinitesimalen Größen zu arbeiten, sollten wir (1) zunächst mit $\mathrm{d}f$ multiplizieren, sodass die infinitesimale Energiemenge $\mathrm{d}U(f)$ im Intervall von f bis $f + \mathrm{d}f$ sichtbar proportional zu $\mathrm{d}f$ dasteht:

   $$\mathrm{d}U(f) = \ldots \cdot \mathrm{d}f \tag{2}$$

   ii. Frequenz f und Wellenlänge λ sind via Wellenbeziehung $c = \lambda \cdot f$ direkt miteinander verbandelt. Deshalb lässt sich beispielsweise f als Funktion von λ auffassen, woraus aber durch eine Ableitung auch eine Beziehung zwischen den infinitesimalen Schritten $\mathrm{d}f$ und $\mathrm{d}\lambda$ entsteht:

   $$f(\lambda) = \frac{c}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2} \quad \text{resp.} \quad \mathrm{d}f = -\frac{c}{\lambda^2} \cdot \mathrm{d}\lambda \tag{3}$$

   Das Minuszeichen ist leicht zu verstehen. Wenn wir beispielsweise die Wellenlänge λ vergrössern, d.h. $\mathrm{d}\lambda > 0$, so muss gleichzeitig die Frequenz f kleiner werden, also $\mathrm{d}f < 0$.

   iii. Nun müssen die Ausdrücke für f und $\mathrm{d}f$ aus (3) in die Gleichung (2) eingesetzt werden, sodass dort die Frequenz f nicht mehr auftaucht.

   iv. Zum Schluss teilen wir die Gleichung durch $\mathrm{d}\lambda$ und erhalten so den Ausdruck für $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\lambda}$.
   Bei diesem letzten Schritt dürfen wir das Minuszeichen auch gut weglassen, denn uns interessiert nun eigentlich nicht mehr die Veränderung von λ, sondern vielmehr einfach, wie viel Strahlungsenergie $\mathrm{d}U(\lambda)$ pro Wellenlängenintervall $\mathrm{d}\lambda$ vorhanden ist.

   (b) Lasse dir $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\lambda}$ von GeoGebra aufzeichnen. Uns geht es nur um das qualitative Verständnis. Verwende daher willkürliche Einheiten, die dafür sorgen, dass $h = c = k_\mathrm{B} = 1$ gesetzt werden können. Wir brauchen nur einen Regler für die absolute Temperatur T. Die Wellenlänge λ soll auf der horizontalen Achse liegen, also unser x sein.

   Tipp: Die Exponentialfunktion $e^{\cdots}$ kommt so häufig vor, dass die meisten Rechner und Computer (und eben auch GeoGebra) dafür eine eigene Eingabemöglichkeit `exp(...)` anbieten. Das ist relativ praktisch.

   (c) **Herausforderung für Ableitungsprofis!** Wer Lust hat, darf sich gerne an dieser Aufgabe versuchen. Das Resultat ist altbekannt aus dem Physikunterricht und sehr toll, aber du musst gut ableiten können, algebraisch deine sieben Sachen beieinander haben und schliesslich deinen TR oder GeoGebra im Griff haben.

   Das Ziel: Die Herleitung des **Wien'schen Verschiebungsgesetzes** aus dem Planckgesetz.

   Ausgangslage: Im Physikunterricht hatten wir festgehalten, dass für die von einem Schwarzen Körper emittierte Strahlungsintensität bei verschiedenen Frequenzen gilt:

   $$I_T(\lambda) := \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{2\pi hc^2}{e^{hc/\lambda k_\mathrm{B}T} - 1} \cdot \frac{1}{\lambda^5} \tag{4}$$

Dieses **Planck'sche Strahlungsgesetz** oder einfach **Planckgesetz** entspricht bis auf einen anderen Vorfaktor – $2\pi hc^2$ anstatt $8\pi Vhc$ – dem Resultat aus Aufgabe (a). Es braucht unterschiedliche Vorfaktoren, weil wir unter (a) die Energie- resp. Wellenlängenverteilung im Hohlraum angeschaut haben, nun aber die Verteilung der emittierten Strahlungintensität ($=$ Strahlungsleistung pro Fläche) betrachten. Das sind unterschiedliche physikalische Grössen, aber die Wellenlängenverteilung ist immer noch dieselbe. Die Vorfaktoren sorgen für die korrekten physikalischen Dimensionen. Uns interessiert im Folgenden eine Konsequenz aus der Wellenlängenverteilung an sich. Daher kann uns der Vorfaktor völlig egal sein. Wir dürfen ihn schlicht und ergreifend weglassen.

Bevor Planck sein Strahlungsgesetz präsentierte, hatten sich viele Forschende mit den Eigenschaften der Temperaturstrahlung von Körpern beschäftigt. Der Kurvenverlauf der spektralen Energieverteilung war experimentell erfasst worden und ein gewisser **Wilhelm Wien**[1] (1864 – 1928) hatte entdeckt, dass es einen einfachen Zusammenhang zwischen der Wellenlänge λ_{max} mit maximaler Intensität und der absoluten Temperatur T des emittierenden Körpers gibt:

Das Wien'sche Verschiebungsgesetz

Das Emissionsspektrum eines schwarzen Körpers der absoluten Temperatur T weist bei einer bestimmten Wellenlänge λ_{max} seine höchste Intensität auf. Dabei gilt:

$$\lambda_{\mathrm{max}} = \frac{2898\,\mu\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}}{T} \tag{5}$$

"Die Wellenlänge maximaler Intensität verschiebt sich mit steigender Temperatur zu immer kleineren Werten. λ_{max} und T sind umgekehrt proportional zueinander."

Natürlich musste sich aus einer vernünftigen Theorie der Schwarzkörperstrahlung auch dieses Wien'sche Verschiebungsgesetz ableiten lassen. Nun wollen wir Schritt für Schritt aufzeigen, dass das Planck'sche Strahlungsgesetz tatsächlich diese Anforderung erfüllt:

i. Da uns der Vorfaktor nicht interessiert, geht es nur um die Funktion:

$$f(\lambda) = \frac{1}{e^{hc/\lambda k_{\mathrm{B}}T} - 1}\cdot\frac{1}{\lambda^5} = \frac{1}{e^{a/\lambda} - 1}\cdot\frac{1}{\lambda^5} \qquad \text{mit} \quad a := \frac{hc}{k_{\mathrm{B}}T} \tag{6}$$

Es lohnt sich die Parameterkombination $\frac{hc}{k_{\mathrm{B}}T}$ zwischenzeitlich durch einen neuen Parameter a zu **substituieren**. Dadurch wird $f(\lambda)$ etwas übersichtlicher.

ii. Die unter (b) aufgezeichnet Kurve zeigt uns qualitativ den Graphen von $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\lambda}$ resp. von $f(\lambda)$. Bei einer bestimmten Wellenlänge weist sie ein **lokales Maximum** der spektralen Strahlungsintensität auf. Wir wollen den zugehörigen Wellenlängenwert λ_{max} ermitteln.
Die Differentialrechnung sagt uns, wie das geht: $f(\lambda)$ ist nach λ abzuleiten und danach muss diese Ableitung gleich 0 gesetzt werden, um λ_{max} zu erhalten.
Zur Ableitung von $f(\lambda)$ benötigen wir sowohl die **Produkt**-, als auch die **Kettenregel**! Schliesslich ist erstens $f(\lambda)$ das Produkt aus den beiden Funktion $\frac{1}{e^{a/\lambda}-1}$ und $\frac{1}{\lambda^5}$, und zweitens ist die erste dieser beiden Teilfunktionen eine doppelt verschachtelte Funktion von λ mit innerster Funktion $w(\lambda) = \frac{a}{\lambda}$, zweitinnerster Funktion $v(w) = e^w - 1$ und äusserer Funktion $u(v) = \frac{1}{v}$.
Für eine solche doppelt verschachtelte Funktion lautet die Kettenregel:

$$f(\lambda) = u\Big(v\big(w(\lambda)\big)\Big) \quad \Rightarrow \quad f'(\lambda) = u'\Big(v\big(w(\lambda)\big)\Big)\cdot v'\big(w(\lambda)\big)\cdot w'(\lambda)$$

Dank dem neuen Parameter a bleibt die Sache übersichtlicher, aber beim Ableiten ergibt sich doch ein ziemlich grosser Ausdruck.

[1] Eigentlich Wilhelm "Willy" Carl Werner Otto Fritz Franz Wien. ☺

iii. Die Ableitung muss gleich 0 gesetzt werden. Sie besteht aus zwei Gliedern, aus denen sich ein Faktor ausklammern lässt. Dafür empfehle ich:

$$\text{Faktor zum ausklammern:} \qquad \frac{1}{\left(e^{a/\lambda}-1\right)^2}\cdot\frac{1}{\lambda^7}$$

Das Praktische: Dieser ausgeklammerte Faktor kann für keinen Wert von λ gleich 0 werden. Wenn wir nun also die Ableitung gleich 0 setzen, können wir sofort durch diesen Faktor teilen und was übrig bleibt, sieht schon viel freundlicher aus.

iv. Schliesslich sollte sich die Gleichung für λ auf die folgende Form bringen lassen:

$$e^{\frac{a}{\lambda}}\cdot\left(\frac{a}{\lambda}-5\right)+5=0 \tag{7}$$

Substituieren wir darin noch $\frac{a}{\lambda}$ durch eine neue Unbekannte x, so sehen wir das verbleibende mathematische Problem vor uns:

$$e^{x}\left(x-5\right)+5=0 \tag{8}$$

Du darfst gerne versuchen diese Gleichung nach x aufzulösen, aber das wird dir leider nicht gelingen. Wir haben es hier mit einer sogenannt **transzendenten** Gleichung zu tun. Das sind Gleichungen, deren Lösungen sich eben nicht als geschlossene algebraische Ausdrücke $x=\ldots$ notieren lassen.

Natürlich haben solche Gleichungen Lösungen aus der Menge der irrationalen Zahlen, aber dafür können wir nur numerische Näherungen angeben.

Benutze nun GeoGebra oder deinen TR, um einen Näherungswert x (mit mind. fünf Nachkommastellen) für die Lösung obiger Gleichung anzugeben.

v. Zum Schluss musst du die gefundene Näherungslösung x in die gemachten Substitutionen zurückeinsetzen. Wir haben:

$$x=\frac{a}{\lambda_{\max}}=\frac{hc}{\lambda_{\max}k_{\mathrm{B}}T} \quad\Rightarrow\quad \lambda_{\max}=\ldots \tag{9}$$

Jetzt bleibt nur noch zu zeigen, dass der entstandene Ausdruck für $\lambda_{\max}$ genau demjenigen im Wien'schen Verschiebungsgesetz entspricht.

Hinweis: Hier die exakten Werte für die benötigten **Naturkonstanten** (der TR kennt sie ebenfalls!):

Lichtgeschwindigkeit im Vakuum:	$c=299\,792\,458\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
Planck'sches Wirkungsquantum:	$h=6.626\,070\,15\cdot10^{-34}\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}$
Boltzmann-Konstante:	$k_{\mathrm{B}}=1.380\,649\cdot10^{-23}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$

Anmerkung: Leider sind die TR-Werte für das Planck'sche Wirkungsquantum h und die Boltzmann-Konstante auf den letzten Dezimalen falsch. Ich vermute, dass *Texas Instruments* ihren TR seit der fundamentalen Revision des **internationalen Einheitensystems** im Jahr 2019 einfach noch nicht überarbeitet hat. Seit 2019 sind die Werte dieser Naturkonstanten nämlich keine Messwerte mehr, sondern erhalten innerhalb des Einheitensystem fixe Werte, aus denen dann umgekehrt abgeleitet wird, was beispielsweise ein Meter, eine Sekunde oder ein Kilogramm ist. Hier sind auf jeden Fall die Werte dieses überarbeiteten SI notiert. Sie werden sich nun wohl auf Jahre hinaus nicht mehr verändern.