Übungen zur Quantenphysik

Serie 3: Weiteres in $\mathbb{C}$, mehr DGLs und Fotoeffekt

1. *Konjugiert Komplexes, Betrag und Kehrwert einer komplexen Zahl*

   Illustrierendes Beispiel: $z = 12 - 5\mathrm{i}$

   $$\Rightarrow \quad z^* = 12 + 5\mathrm{i} \qquad |z| = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \qquad z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{z^*}{z^*} = \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{12}{169} + \frac{5}{169}\,\mathrm{i}$$

   Bemerke: $|z|^2 = z^* z$. Diese Idee erlaubt es bei einem Bruch zweier komplexer Zahlen den Nenner in eine reelle Zahl umzuwandeln. Es muss jeweils mit dem konjugiert Komplexen des Nenners erweitert werden (= **"Divisions-Trick"**).

   Gib nun von den folgenden Zahlen je z^*, $|z|$ und z^{-1} an:

   (a) $z_1 = 2 + \mathrm{i}$ (b) $z_2 = 4 - 3\mathrm{i}$ (c) $z_3 = -24 + 7\mathrm{i}$

2. *Division komplexer Zahlen*

   Zur Division komplexer Zahlen verwenden wir den eben gesehenen Divisions-Trick (mit dem konjugiert Komplexen des Nenners erweitern). Ein Beispiel:

   $$\frac{2-\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}} = \frac{2-\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}} \cdot \frac{3+4\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}} = \frac{6+8\mathrm{i}-3\mathrm{i}-4\mathrm{i}^2}{3^2+4^2} = \frac{6+5\mathrm{i}+4}{25} = \frac{10+5\mathrm{i}}{25} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}\,\mathrm{i}$$

   Berechne in dieser Weise:

   (a) $\dfrac{13-5\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ (b) $\dfrac{2-\frac{1}{2}\,\mathrm{i}}{2+\frac{1}{2}\,\mathrm{i}}$ (c) $\dfrac{4\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}\,\mathrm{i}}$

3. *Der Identifikationstrick*

   Eben haben wir gesehen, wie sich die Division komplexer Zahlen effizient ausführen lässt (Divisions-Trick, also Erweiterung mit dem konjugiert Komplexen). Damit liesse sich auch die Gleichung

   $$(-2 + 7\mathrm{i}) \cdot z = -5 + 97\mathrm{i}$$

   nach Division durch $-2 + 7\mathrm{i}$ rasch lösen. Löse diese Gleichung nun aber nach folgendem Vorgehen:

   i. Notiere links z in der Summenschreibweise $x + \mathrm{i}y$ und multipliziere dann distributiv aus.
   ii. Sortiere links nach Gliedern mit i und solchen ohne.
   iii. Nun kommt der Hauptschritt mit dem entscheidenden Gedanken: **Jede komplexe Zahl besteht aus einem eindeutigen Real- und einen eindeutigen Imaginärteil.**

      Soll unsere Gleichung wahr sein, so muss die komplexe Zahl links den genau gleichen Realteil haben wie diejenige rechts. Ebenso müssen die Imaginärteile übereinstimmen. Durch **Identifikation** der Real- und der Imaginärteile (d.h. Gleichsetzen) erhalten wir ein Gleichungssystem für x und y:

      $$\left| \begin{array}{l} \ldots = -5 \\ \ldots = 97 \end{array} \right|$$

      Das funktioniert natürlich nur, weil x und y selber reelle Zahlen sind.
   iv. Löse dieses Gleichungssystem auf und notiere die Lösung $z = \ldots$.

   Natürlich kannst du deine Lösung durch Zurückeinsetzen in die Anfangsgleichung überprüfen.

4. *Differentialgleichungen mit gegebenem Funktionsansatz zu Ende lösen*

   Bei den folgenden Aufgaben sollst du jeweils verifizieren, dass der gegebene **Funktionsansatz** die Differentialgleichung erfüllt.

   "Erfüllen" bedeutet, dass sich nach dem Einsetzen von $f(x)$, $f'(x)$, etc. in die DGL alle Glieder mit Variable x vollständig aus der Gleichung herausstreichen lassen. Dadurch ist gezeigt, dass die durch die DGL beschriebene Beziehung tatsächlich an jeder beliebigen Stelle x gültig ist. In aller Regel stimmt dies aber nur dann, wenn zwischen den anderen Parametern der DGL und des Funktionsansatzes bestimmte Beziehungen gelten.

   Erst durch zusätzliche **Randbedingung(en) (RBs)** werden schliesslich sämtliche im Funktionsansatz enthaltenen Parameter eindeutig festgelegt.

Beispiel: $f'(x) = -\frac{1}{3} \cdot f(x)$ mit RB: $f(0) = 5$.

Klassifizierung: Umstellung: $f'(x) + \frac{1}{3} \cdot f(x) = 0 \;\;\Rightarrow\;\;$ lineare, homogene DGL 1. Ordnung!

Behauptung: Der Ansatz $f(x) = A \cdot e^{ax}$ erfüllt die DGL.

Überprüfung: $f'(x) = A \cdot e^{ax} \cdot a$.

Setze $f(x)$ und $f'(x)$ in die DGL ein: $f'(x) = -\frac{1}{3} \cdot f(x) \;\;\Rightarrow\;\; A \cdot e^{ax} \cdot a = -\frac{1}{3} \cdot A \cdot e^{ax}$.

Exponentialterm e^{ax} und Vorfaktor A kürzen sich raus $\;\Rightarrow\;\; a = -\frac{1}{3}$. Sofern der Parameter a also dem Negativen des Faktors k in der ursprünglichen DGL entspricht, erfüllt unser Ansatz diese DGL. Die Variable x streicht sich raus. Das bedeutet, die DGL ist wirklich an jeder beliebigen Stelle x erfüllt.

Allgemeine Lösung: Die allg. Lsg. der DGL lautet also $f(x) = A \cdot e^{-x/3}$. Sie enthält einen noch nicht bestimmten Parameter A, wie wir das von einer DGL 1. Ordnung erwarten.

RB einsetzen: Die RB legt den Parameter A fest: $f(0) = A \cdot e^0 = A \stackrel{!}{=} 5$.

Eindeutige Lösung: Somit lautet unsere eindeutige Lösung: $f(x) = 5\, e^{-x/3}$.

Finde nun bei den folgenden DGLs jeweils aufgrund des gegebenen Funktionsansatzes und der Randbedingungen die **eindeutige Lösung**. **Klassifiziere** alle DGLs! Linear/nicht-linear? Homogen/inhomogen? Ordnung? (Vgl. DGL-Skript Seiten 1+2.)

(a) $x^2 f''(x) - 2x f'(x) + 2f(x) = 6$ mit RBs $f(2) = 17$ und $f'(-1) = -1$.

Beh.: Mit dem Ansatz $f(x) = ax^2 + bx + c$ (quadratische Fkt.) lässt sich diese DGL eindeutig lösen.

(b) $f''(x) = -3f'(x) + 4f(x) + 8x^2$ mit RBs: $f(0) = 0$ und $f'(0) = 0$.

Beh.: Mit $f(x) = -2x^2 - 3x - \frac{13}{4} + A\, e^{-4x} + B\, e^{x}$ lässt sich diese DGL eindeutig lösen.

Die Aufgaben (c) und (d) sind für diejenigen gedacht, denen es gerade so viel Spass macht, dass sie gerne noch mehr Aufgaben lösen möchten...

(c) $f'(x) = -\sin x \cdot f(x)$ mit RB: $f'(\frac{\pi}{3}) = 1$.

Beh.: Mit $f(x) = A\, e^{\cos x}$ lässt sich diese DGL eindeutig lösen.

(d) $f'(x) - \frac{x^2}{f^2(x)} \cdot (x^2 + 2) = 0$ mit RB: $f(0) = -3$.

Beh.: Mit $f(x) = \sqrt[3]{\frac{3}{5}x^5 + 2x^3 + 3c}$ lässt sich diese DGL eindeutig lösen.

Hinweise: $f^2(x) := \big(f(x)\big)^2$. Und fürs Ableiten: $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \;\;\Rightarrow\;\; [\sqrt[3]{x}\,]' = \frac{1}{3}\, x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

5. *Radioaktive Zerfälle und Zerfallsgesetz*

Wir betrachten eine **radioaktive Quelle**, in der es zum Zeitpunkt $t = 0$ N_0 **Radionuklide** ($=$ Atome mit instabilem Kern) einer bestimmten Sorte geben soll, z.B. C–14. Diese Radionuklide haben eine **Halbwertzeit** $T_{1/2}$ – im Falle von C–14 sind es 5730 Jahre – in der für jedes einzelne Radionuklid eine Wahrscheinlichkeit von $50\,\%$ besteht, dass der Kern radioaktiv zerfällt.

Wie verändert sich die Anzahl **Radionuklide** in der Quelle? Wie lautet also die Funktion $N(t)$, die zu jedem Zeitpunkt t angibt, wie viele Radionuklide noch in der Quelle vorhanden sind?

Die Antwort kennt ihr bereits aus der Kernphysik. Es muss sich das exponentiell abfallende **Zerfallsgesetz** ergeben.

Vorüberlegungen: Zu irgendeinem Zeitpunkt t sind noch $N(t)$ Radionuklide vorhanden. Im darauf folgenden Zeitabschnitt Δt verändert sich die Anzahl noch vorhandener Radionuklide um ΔN. Dabei muss $\Delta N < 0$ sein, denn es handelt sich um eine Abnahme von N.

Für jeden einzelnen der $N(t)$ radioaktiven Kerne besteht dieselbe Wahrscheinlichkeit innerhalb von Δt zu zerfallen, sodass die Gesamtzahl der tatsächlich innerhalb von Δt zerfallenden Kerne proportional zu $N(t)$ sein muss. Dieser Gedanke gilt auch – oder vielleicht insbesondere (!) – im Infinitesimalen. Im infinitesimalen Zeitschritt $\mathrm{d}t$ verändert sich die Anzahl noch vorhandener Radionuklide um $\mathrm{d}N$, wobei diese Veränderung proportional zu $N(t)$ sein muss. Somit erhalten wir eine infinitesimale Gleichung:

$$\mathrm{d}N = -\lambda \cdot N(t) \cdot \mathrm{d}t$$

Die sogenannte **Zerfallskonstante** λ muss als Mass für die **Zerfallswahrscheinlichkeit** des einzelnen Kerns interpretiert werden. Sie soll per Definition positiv sein: $\lambda > 0$. So verstehen wir auch das zusätzlich eingefügte Minuszeichen. Es sorgt dafür, dass $\mathrm{d}N$ negativ herauskommt (Abnahme!).

Die Differentialgleichung: Teilen wir obige Gleichung durch $\mathrm{d}t$, so folgt:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda \cdot N(t) \qquad \text{resp.} \qquad N'(t) = -\lambda \cdot N(t)$$

(a) Finde den allgemeinen Lösungsansatz $N(t) = \ldots$ für diese **Differentialgleichung**.

  Achtung: Es handelt sich um eine normale Differenzialgleichung 1. Ordnung. In die allgemeine Lösung muss folglich ein zusätzlicher, frei wählbarer Parameter eingebaut werden.

  Tipp: Einleitungsbeispiel in Aufgabe 4!

(b) Bestimme den frei wählbaren Parameter so, dass die Anfangsbedingung $N(0) = N_0$ erfüllt ist und notiere somit die Abnahmefunktion $N(t)$ der Radionuklide in unserer Quelle (Zerfallsgesetz).

(c) Zwischen der Zerfallskonstante λ und der Halbwertzeit $T_{1/2}$ muss es einen Zusammenhang geben, denn: Je grösser die Zerfallswahrscheinlichkeit ist, desto kleiner wird die Halbwertszeit sein müssen. . . Wie lautet der mathematisch exakte Zusammenhang zwischen λ und $T_{1/2}$?

6. *Aufgaben zum Fotoeffekt und zu $E_\gamma = hf$*

   (a) Der Ausdruck hc taucht relativ häufig auf. In SI-Einheiten ist er oftmals etwas unpraktisch...
   Zeige, dass hc mit vier signifikanten Ziffern den Wert $1240\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm}$ aufweist.
   In Zukunft können wir für hc diesen Wert verwenden, wenn es gerade praktisch ist.

   (b) Notiere die Energie $E_\gamma = hf$ eines Photons unter Ausnutzung der Wellenbeziehung $c = \lambda f$ in Abhängigkeit von der Wellenlänge λ. So siehst du, wo hc vor allem anzutreffen ist.

   (c) Zeige durch ablesen und berechnen, dass die Steigungen der drei Geraden im Diagramm auf Seite 5 im Theorietext zum Fotoeffekt gerade dem Planck'schen Wirkungsquantum h entsprechen.

   (d) Die Austrittsarbeit von Zink beträgt $\phi = 4.3\,\mathrm{eV}$. Welche Wellenlänge darf monochromatisches Licht maximal aufweisen, wenn es Elektronen aus einer Zinkplatte herausschlagen soll.
   Welche "Farbe" gehört zum Grenzfall?

   (e) Wie gross ist das Grenz-Bremspotential, wenn Licht von $150\,\mathrm{nm}$ auf eine Wolframplatte trifft?

   (f) Einer unserer Schullaser (He-Ne-Laser) emittiert eine Strahlungsleistung von $0.50\,\mathrm{mW}$ bei einer Wellenlänge von $\lambda = 632.8\,\mathrm{nm}$.
   Wie viele Photonen verlassen den Laser pro Sekunde?