**Übungen zur Quantenphysik**

# Serie 4: Differentialgleichungen aus der Newton'schen Mechanik

1. *Mehr Aufgabenstellungen mit komplexen Zahlen*

   (a) Berechne:

   i. $(2-\mathrm{i})^4$ ii. $\mathrm{Re}\big((-1+\mathrm{i})^5\big)$ iii. $\mathrm{Im}\left(\left(2-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^6\right)$

   (b) Löse die folgenden Gleichungen in $\mathbb{C}$:

   i. $(1+2\mathrm{i})z = (5-\mathrm{i})z + 7 + 26\mathrm{i}$

   ii. $(2+\mathrm{i})z - 3\mathrm{Re}(z) = -18 + 30\mathrm{i}$

   iii. $z + 2\mathrm{i}z^* = 8 + 7\mathrm{i}$

   iv. $\dfrac{z-3\mathrm{i}-3}{z+2+4\mathrm{i}} = \mathrm{i}$

   v. $\mathrm{Im}(z^*+1) + \mathrm{i}\cdot\mathrm{Re}(-z+2) = -\dfrac{1}{2} - 6\mathrm{i}$

   **Tipp:** Verwende bei Bedarf den Ansatz $z = x + y\mathrm{i}$ und bestimme so $x$ und $y$ separat.

### Vorbemerkung zu den Aufgaben 2 und 3

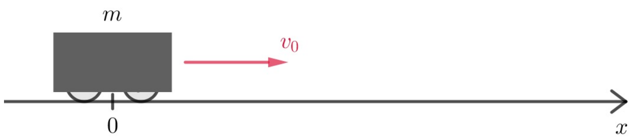
In den letzten beiden Aufgaben dieser Übungsserie vertiefen wir unser differentielles Verständnis der Newton'schen Mechanik. Das Zweite Newton'sche Axiom, also das *Aktionsprinzip*, legt fest, wie die Bewegung eines Körpers weitergeht. Dabei handelt es sich um eine *gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung* für die *Ortsfunktion* $x(t)$, wobei die 1. Ableitung als *Geschwindigkeitsfunktion* $v(t) = x'(t)$ und die 2. Ableitung als *Beschleunigungsfunktion* $a(t) = v'(t) = x''(t)$ zu verstehen sind. Die auf den Körper wirkenden Kräfte treten in dieser Differentialgleichung auf. Ihre allgemeine Lösung beinhaltet eine ganze Schar von Ortsfunktionen $x(t)$. Der eindeutige Bewegungsablauf wird erst durch zwei *Randbedingungen* festgelegt.

Wie schon in früheren Aufgaben geht es nicht darum, dass du selber den allgemeinen Funktionsansatz zur Lösung der DGL findest. Vielmehr gebe ich diesen Ansatz vor und du verifizierst, dass er die DGL tatsächlich löst. Hinterher ermittelst du unter Ausnutzung der Anfangsbedingungen die noch nicht festgelegten Funktionsparameter. Leite also jeweils den Ansatz für die Ortsfunktionen $x(t)$ zweimal ab, um Ausdrücke für $v(t)$ und $a(t)$ zu erhalten, und bestimme anschliessend aufgrund der weiteren Angaben die fehlenden Parameter $A$ und $B$. Überlege dir, welche physikalische Dimension resp. Bedeutung $A$ und $B$ haben (Länge? Ort? Geschwindigkeit? Etc.).

2. *Zwei Reibungsarten: Veranschaulichungen zum Aktionsprinzip als Differentialgleichung*

Es gibt verschiedene Arten von Reibung, die ein sich bewegendes Objekt abbremsen können. Ein Beispiel ist eine von der Geschwindigkeit $v$ unabhängige Gleit- oder Rollreibung, ein anderes die Wirbelstrombremse, deren Bremswirkung proportional zur momentanen Geschwindigkeit $v$ ist.

Ein Wagen soll einmal durch die Rollreibung und einmal durch eine Wirbelstrombremse abgebremst werden. In beiden Fällen habe er anfangs (zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort $x = 0$) die Geschwindigkeit $v_0$. Wir interessieren uns für die Strecke und die Zeitspanne bis zum Stillstand:




Stets soll die abbremsende Kraft $F_\mathrm{B}$ die einzige auf den Wagen wirkende Kraft sein, d.h. $F_\mathrm{res} = F_\mathrm{B}$. Da die Bewegung in die positive Richtung der $x$-Achse erfolgt, ist $v_0 > 0$. $F_\mathrm{B}$ wirkt dieser Bewegung entgegen, muss also als negative Kraft aufgefasst werden: $F_\mathrm{B} < 0$.

(a) *Konstante Reibungskraft (z.B. Rollreibung)*

Die Reibungskraft habe einen konstanten Wert, also $F_\mathrm{B} = -\alpha$, den wir als gegeben erachten, sodass sich mit dem Aktionsprinzip eine Differentialgleichung notieren lässt:

$$F_\mathrm{res} = F_\mathrm{B} \stackrel{!}{=} m \cdot a \qquad \Rightarrow \qquad -\alpha = m \cdot x''(t) \quad \text{resp.} \quad x''(t) = -\frac{\alpha}{m}$$

i. Zeige, dass der Ansatz $x(t) = A + Bt + Ct^2$ diese DGL löst, wenn $C$ auf eine bestimmte Weise von den gegebenen Parametern $\alpha$ und $m$ abhängt.

ii. Wie setzen sich die $A$ und $B$ aus $v_0$, $\alpha$ und $m$ zusammen und wofür stehen sie?
**Tipp:** Randbedingungen einsetzen!

iii. Gib zudem in Abhängigkeit von $v_0$, $\alpha$ und $m$ an, wie weit der Wagen ausrollt ($x_\mathrm{end}$) und wie lange der Abbremsvorgang dauert ($t_\mathrm{end}$).

iv. Es seien $m = 2\,\mathrm{kg}$, $\alpha = 0.1\,\mathrm{N}$ und $v_0 = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Berechne $x_\mathrm{end}$ und $t_\mathrm{end}$ und lasse dir von *GeoGebra* die drei Funktionen $x(t)$, $v(t)$ und $a(t)$ bis zum Stillstand aufzeichnen.

(b) *Bremskraft proportional zu $v$ (z.B. Wirbelstrombremsung)*

Nun sei die abbremsende Kraft proportional zur momentanen Geschwindigkeit $v$, also $F = -\beta \cdot v$. Mit dem Aktionsprinzip schreiben wir:

$$F_\mathrm{res} = F_\mathrm{B} = -\beta \cdot v \stackrel{!}{=} m \cdot a \qquad \Rightarrow \qquad -\beta \cdot x'(t) = m \cdot x''(t)$$

Das scheint kompliziert zu sein, denn hier kommt die Ortsfunktion $x(t)$ selber gar nicht mehr vor, sondern nur noch ihre 1. und ihre 2. Ableitung. Das braucht dich nun aber gar nicht zu kümmern...

i. Zeige, dass der Ansatz $x(t) = A + B \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ diese DGL erfüllt, falls $\lambda$ auf eine bestimmte Art von den gegebenen Parametern $\beta$ und $m$ abhängt.

ii. Benutze die Randbedingungen um anzugeben, wie sich $A$ und $B$ aus $v_0$, $\beta$ und $m$ zusammensetzen.

iii. Versuche nun in Abhängigkeit von $v_0$, $\beta$ und $m$ anzugeben, wie weit der Wagen ausrollt und wie lange der Abbremsvorgang dauert.

iv. Es seien $m = 2\,\mathrm{kg}$, $\beta = 0.1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m/s}}$ und $v_0 = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Lasse dir von *GeoGebra* die drei Funktionen $x(t)$, $v(t)$ und $a(t)$ aufzeichnen.

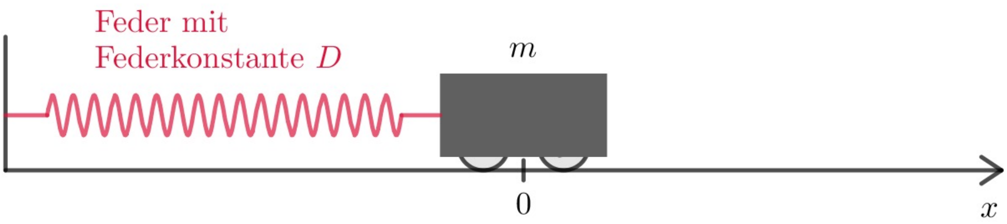
v. Welche physikalische Bedeutung haben die beiden Parameter $A$ und $B$?

3. *Noch ein Beispiel zum Aktionsprinzip als Differentialgleichung*

   Ein Wagen sei an einer Spiralfeder mit Federkonstante $D$ befestigt.

   **Anmerkung:** Zu jeder Spiralfeder gehört eine bestimmte Federkonstante $D$, die ausdrückt, wie stark die Feder ist. Hat eine Feder beispielsweise die Federkonstante $D = 0.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{cm}}$, so erzeugt die Feder $0.5\,\mathrm{N}$ Kraft pro Zentimeter, um den sie aus ihrer entspannten Lage ausgelenkt ist.

   Die Ruhelage des Wagens bei entspannter Feder entspreche dem Ort $x = 0$ auf einer horizontal liegenden Ortsachse:




   Wird der Wagen nach links oder nach rechts aus der Ruhelage ausgelenkt, so versucht ihn die Federkraft $F_\mathrm{F}$ in die Ruhelage $x = 0$ zurück zu ziehen oder zu stossen. Es gilt:

$$F_\mathrm{F} = -D \cdot x$$

   Das Minuszeichen sorgt dafür, dass $F_\mathrm{F}$ eine rücktreibende Kraft ist, also in Richtung von $x = 0$ wirkt. Befindet sich der Wagen z.B. bei $x = 5\,\mathrm{cm} > 0$, so wird $F_\mathrm{F}$ negativ. Umgekehrt ist $F_\mathrm{F}$ positiv, wenn sich der Wagen z.B. bei $x = -5\,\mathrm{cm} < 0$ aufhält.

   (a) Wenn wir von einer reibungsfreien Rollbahn und vernachlässigbarem Luftwiderstand ausgehen, ist die Federkraft $F_\mathrm{F}$ die einzige auf den Wagen wirkende Kraft. D.h., die Federkraft ist gerade die resultierende Kraft $F_\mathrm{res}$ und wir können schreiben:

$$F_\mathrm{F} = m \cdot \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

   Mit dem Ausdruck für die Federkraft von oben folgt damit:

$$-D \cdot x = m \cdot \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \qquad \text{resp.} \qquad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{D}{m}\,x \qquad \text{oder} \qquad x''(t) = -\frac{D}{m}\,x(t)$$

   Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde der Wagen von der Stelle $x_0 = -5\,\mathrm{cm}$ aus losgelassen ($v_0 = 0$).

   i. Zeige, dass der Ansatz $x(t) = A \cdot \sin(\omega t) + B \cdot \cos(\omega t)$ diese DGL erfüllt, falls $\omega$ auf eine bestimmte Art von den gegebenen Parametern $D$ und $m$ abhängt.

   ii. Wie sind die Parameter $A$ und $B$ in der allgemeinen Lösung zu setzen, um obige Anfangsbedingungen zu erfüllen? Wie lautet folglich die vollständige Ortsfunktion $x(t)$ für den Wagen?

   iii. Der Wagen habe eine Masse von $0.5\,\mathrm{kg}$ und die Federkonstante betrage $7.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$.
   Mit welcher Kreisfrequenz $\omega$ schwingt der Wagen hin und her? Und wie gross sind folglich Frequenz $f$ und Periode $T$ dieser Schwingung?