Übungen zur Quantenphysik

Serie 5: Euler-Darstellung und DGL-Training

1. *Umrechnungen zwischen Summenschreibweise und Euler-Darstellung komplexer Zahlen*

   (a) Notiere die komplexen Zahlen mit den folgenden Polarkoordinaten in der Summenschreibweise $z = x + y\mathrm{i}$ mit kartesischen Koordinaten x und y (alles **exakt**!):

   i. $r = 2$ und $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ii. $r = 5$ und $\varphi = \pi$

   iii. $r = \sqrt{3}$ und $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ iv. $r = 6$ und $\varphi = \frac{3\pi}{2}$

   (b) Gib die folgenden komplexen Zahlen in der Euler-Darstellung an (alles **exakt**!):

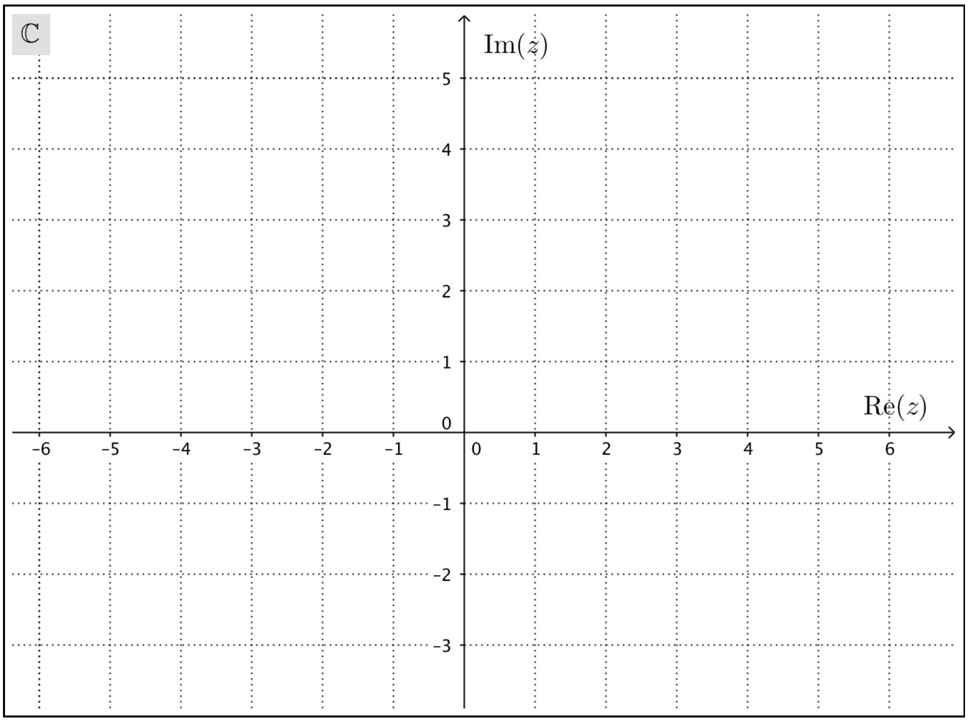
   i. $2 - 2\mathrm{i}$ ii. 3 iii. $-3\mathrm{i}$ iv. $-2 - 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

2. *Das Verständnis der Multiplikation und der Division im Komplexen*

   Gegeben seien die beiden Zahlen $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ und $z_2 = -\sqrt{6} + \sqrt{2}\,\mathrm{i}$.

   (a) Berechne sowohl $z_1 \cdot z_2$, als auch $\frac{z_2}{z_1}$ in kartesischen Koordinaten.

   (b) Trage z_1 und z_2, sowie $z_1 \cdot z_2$ und $\frac{z_2}{z_1}$ als Punkte in der folgenden komplexen Ebene ein:



   (c) Rechne z_1 und z_2 in die Euler-Darstellung um und bestimme damit auch $z_1 \cdot z_2$ und $\frac{z_2}{z_1}$ in der Euler-Darstellung. (**Tipp:** $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$.)

   (d) Beschreibe in Worten, was bei der Multiplikation $z_1 \cdot z_2$ und bei der Division $\frac{z_2}{z_1}$ mit den beiden Zahlen z_1 und z_2 in der komplexen Ebene "angestellt" wird.

   (e) Überzeuge dich davon, dass $z_1 \cdot z_2$ und $\frac{z_2}{z_1}$ in der Summenschreibweise und in der Euler-Darstellung dasselbe Resultat ergeben.

   (f) Schliesslich: Wie lauten die exakten Werte für $\cos\frac{7\pi}{12}$ und $\sin\frac{7\pi}{12}$?

Die zwei folgenden Aufgaben sollen einerseits weitere Beispiele von Differentialgleichungen zeigen, und andererseits den Gebrauch von Produkt-, Quotienten- und Kettenregel trainieren. Diese drei allgemeinen Ableitungsregeln seien hier nochmals kurz aufgeführt:

Produktregel:	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
Quotientenregel:	$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\Rightarrow$	$f'(x) = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$
Kettenregel:	$f(x) = u\big(v(x)\big)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = u'\big(v(x)\big) \cdot v'(x)$

3. *Zwei kompliziertere Trainingsdifferentialgleichungen*

   Im Internet findet man auf Anhieb zahlreiche Beispiele verschiedenster Differentialgleichungen. Hier zwei Beispiele aus diesem Fundus. Zeige jeweils die Richtigkeit des Ansatzes durch Zurückeinsetzen in die DGL und ermittle danach die noch nicht festgelegten Parameter.

   (a) DGL: $\quad x f'(x) - f(x) + x\, e^{\frac{f(x)}{x}} = -x \quad$ mit RB: $f(5) = 0$.
   Ansatz: $\quad f(x) = -x \ln(Cx - 1)$.
   Tipps: $e^{\ln x} = x$ und $-\ln x = \ln \frac{1}{x}$.

   (b) DGL: $\quad f''(x) + 2\sqrt{3}\, f'(x) + 3f(x) = 0 \quad$ mit RBs: $f(0) = \sqrt{3}$ und $f'(0) = 0$.
   Ansatz: $\quad f(x) = \frac{Ax+B}{e^{\sqrt{3}x}}$.
   Tipps: Verwende beim Ableiten die Quotientenregel und kürze hinterher direkt mit $e^{\sqrt{3}x}$.

4. *Hermitesche Polynome $H_n(x)$ und die Rodrigues-Formel*

   Irgendwann im zweiten Teil des Semesters werden wir es mit Familien von Funktionen mit bestimmten Eigenschaften zu tun haben. Eine solche Familie bilden die **hermiteschen Polynome** – benannt nach ihrem Erfinder, dem französischen Mathematiker **Charles Hermite** (1822 – 1901) – die wir in dieser Aufgabe ein erstes Mal kennenlernen.

   Das n-te hermitesche Polynom $H_n(x)$ ist gegeben durch die **Rodrigues-Formel**:

   $$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n e^{-x^2} \qquad \text{für} \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

   Dabei ist $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n e^{-x^2}$ die n-te Ableitung von e^{-x^2}, wobei $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^0 e^{-x^2}$ immer noch gleich e^{-x^2} ist.

   (a) Bestimme die hermiteschen Polynome für $n = 0, \ldots, 4$.

   (b) Wie lautet im n-ten hermiteschen Polynom $H_n(x)$ der Term mit der höchsten Potenz von x? Stelle eine Vermutung auf.

   (c) Vermute ebenso: Welche Potenzen von x tauchen in $H_{20}(x)$, welche in $H_{21}(x)$ auf?

   (d) Die wesentliche Eigenschaft der hermiteschen Polynome ist, dass sie allesamt die **Hermitesche Differentialgleichung** erfüllen:

   $$H_n''(x) - 2x\, H_n'(x) + 2n\, H_n(x) = 0 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

   Überprüfe diese Eigenschaft bei $H_0(x)$ bis $H_4(x)$, die du aus Aufgabe (a) kennen solltest.

   (e) Überprüfe für $n = 1, 2, 3, 4$ ebenso, dass die folgende Beziehung korrekt ist:

   $$\frac{\mathrm{d}H_n(x)}{\mathrm{d}x} = 2n\, H_{n-1}(x)$$