Übungen zur Quantenphysik

Serie 6: Komplexe Wurzeln und Statistik diskreter Variablen

1. *Komplexes Wurzelziehen*

   Bestimme die Lösungsmenge und skizziere die Lösungen in der komplexen Ebene:

   (a) $z^2 = -1$ (b) $16z^4 = -1$ (c) $z^3 = -\mathrm{i}$

   (d) $z^4 = 4\mathrm{i}$ (e) $z^3 = 2 + 2\mathrm{i}$ (f) $z^5 = -\sqrt{3} + 3\mathrm{i}$

2. *Quadratische Gleichungen in* $\mathbb{C}$

   Bestimme die beiden Lösungen und zeige ihre Lage in der komplexen Ebene:

   (a) $z^2 - z + 1 = 0$ (b) $z^2 - 2z + 2\mathrm{i} + 1 = 0$ (c) $z^2 + z - 3 = 2\mathrm{i}z + \mathrm{i}$

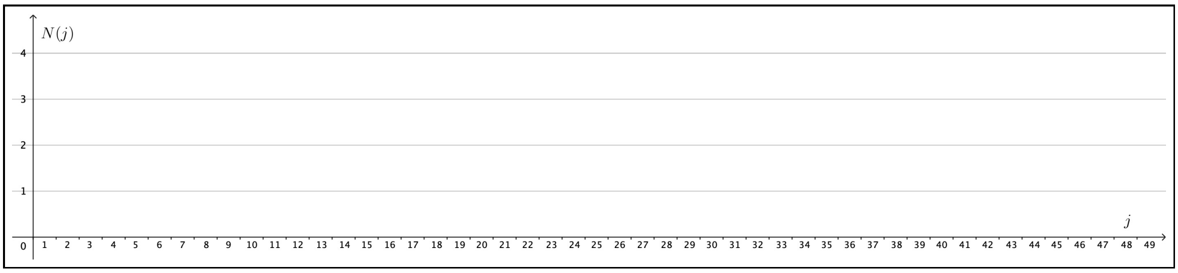
   (d) $\mathrm{i}z^2 + 2z = 3\mathrm{i}$ (e) $\mathrm{i}z^2 + 3z - 2\mathrm{i} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ (f) $z^2 - (2+\mathrm{i})z = -1 - \mathrm{i}$

3. *Die Altersstatistik in unserem "QM-Grüppli"*

   Wir betrachten die Altersangaben in unserer EF-Klasse (Stichtag: Do 28.9.23):

   17, 17, 17, 17, 19, 21, 47

   (a) Skizziere ein Histogramm für unsere Altersverteilung, genau so, wie es in Abb. 1.4 im Griffiths gezeigt wird.



   (b) Bestimme das **wahrscheinlichste Alter**, den **Median**, den **Erwartungswert**, die **Varianz** und die **Standardabweichung** unserer Altersverteilung – einmal mit A. Gertsch und einmal ohne.

   Führe die Rechnungen für den Fall "ohne A. Gertsch" von Hand und mathematisch exakt aus. Für den Fall "mit A. Gertsch" kannst du gerne das Excel-File aus dem Unterricht adaptieren.

   Welche Werte unterscheiden sich beim Vergleich der beiden Fälle überhaupt/geringfügig/deutlich? Weshalb wohl?

   (c) Überprüfe in deiner Berechnung der Varianz (Gruppe inkl. A. Gertsch), dass gilt:

   $$\left\langle (\Delta j)^2 \right\rangle = \left\langle j^2 \right\rangle - \langle j \rangle^2$$

   D.h., berechne σ^2 einmal aus $\left\langle (\Delta j)^2 \right\rangle = \sum (j - \langle j \rangle)^2 P(j)$ und einmal aus $\left\langle j^2 \right\rangle - \langle j \rangle^2$. Welcher Weg ist einfacher/rascher?

4. **Herausforderung:** *Fallen mit Luftwiderstand*

Warnung! Ab Teilaufgabe (e) wird es happig. Wenn du mal so richtig ausloten möchtest, wie weit deine Algebra- und Differentialkünste reichen, dann miss dich an dieser Aufgabe.

Ein Fallschirmspringer springt in grosser Höhe aus einem Hubschrauber. Wir betrachten den Fallvorgang vor dem Öffnen des Schirms. $x(t)$ bezeichne die bis zum Zeitpunkt t zurückgelegte Fallstrecke. Während dem Fallen erfährt der Springer einen Luftwiderstand F_{L} nach oben, der proportional zum Quadrat zu seiner aktuellen Geschwindigkeit $v(t)$ sein soll:

$$F_{\mathrm{L}} = k \cdot v^2(t) = k \cdot \big(x'(t)\big)^2 \tag{1}$$

Dabei ist k irgendein Faktor, der von der "Geometrie" des Springers (Form, Fläche) abhängt.

Auf den Springer wirkt zudem die Gewichtskraft $F_{\mathrm{G}} = m \cdot g$ nach unten. Die Differentialgleichung für die Ortsfunktion $x(t)$ folgt mit $v(t) = x'(t)$ und $a(t) = x''(t)$ aus dem Aktionsprinzip:

$$F_{\mathrm{res}} = F_{\mathrm{G}} - F_{\mathrm{L}} \stackrel{!}{=} m \cdot a \qquad \Rightarrow \qquad m \cdot g - k \cdot \big(x'(t)\big)^2 = m \cdot x''(t)$$

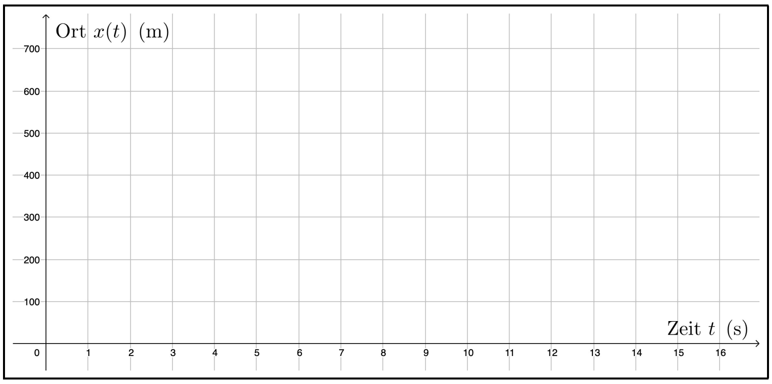
Nach Umstellung wird klar, dass es sich um eine **inhomogene, nicht-lineare DGL 2. Ordnung** für die Ortsfunktion $x(t)$ handelt:

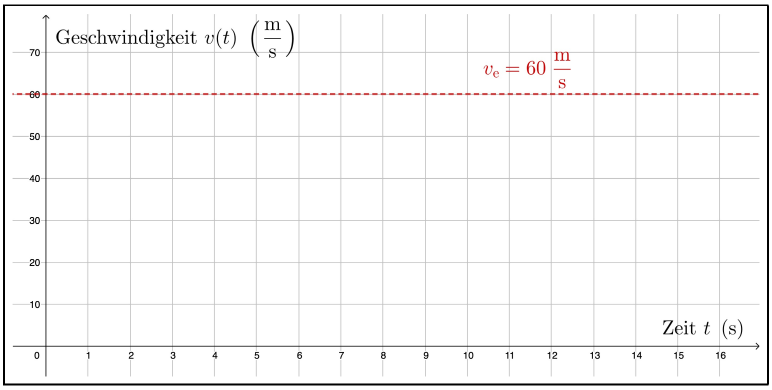
$$m \cdot x''(t) + k \cdot \big(x'(t)\big)^2 = m \cdot g \tag{2}$$

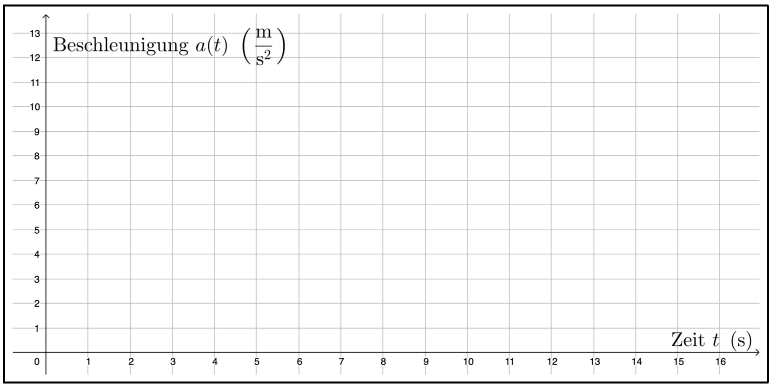
(a) Anfangs wird der Springer schneller, wodurch sich sein Luftwiderstand vergrössert. Nach und nach stellt sich dadurch ein Kräftegleichgewicht zwischen F_{L} und F_{G} ein. Damit verschwinden resultierende Kraft und Beschleunigung, sodass der Springer schliesslich mit einer konstanten Endgeschwindigkeit von $v_{\mathrm{e}} = 216\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 60\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ($\approx$ realistischer Wert!) weiter fällt.

Skizziere nun aufgrund dieser Vorüberlegungen den **ungefähren Verlauf** der drei Bewegungsdiagramme, die rechts vorbereitet sind. (Es geht hier noch nicht darum die Lösung der DGL zu kennen, sondern erst darum qualitativ zu verstehen, was bei der Lösung der DGL in etwa rauskommen muss.)

Dabei gehen wir von den **Anfangsbedingungen** $x(0) = 0$ und $v(0) = 0$ aus.







(b) Rein qualitativ ist offensichtlich recht gut nachvollziehbar, was bei diesem Fallvorgang passiert.

Die quantitative Lösung in Form einer zugehörigen Ortsfunktion $x(t)$ zu ermitteln, ist allerdings wesentlich anspruchsvoller, wie im Folgenden zumindest teilweise klar wird.

Betrachten wir zuerst den Endzustand mit $v_\mathrm{e} = \mathrm{konstant}$. Der Luftwiderstandsfaktor k muss genau so gross sein, dass sich beim Fallen mit v_e das Gleichgewicht $F_\mathrm{L} = F_\mathrm{G}$ einstellt.

Wie setzt sich k demzufolge aus der Endgeschwindigkeit v_e $(= 60\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})$, der Fallbeschleunigung g $(= 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})$ und der Masse m $(= 100\,\mathrm{kg})$ zusammen?

(c) Setze den unter (b) gefundenen Ausdruck für k in (2) ein und zeige, dass damit folgt:

$$x''(t) + \frac{g}{v_\mathrm{e}^2}\,\big(x'(t)\big)^2 = g \tag{3}$$

(d) Zeige, dass der Funktionsansatz

$$x(t) = A \cdot \Big(\ln\left(e^{2\lambda t} + 1\right) - \lambda t\Big) + B \tag{4}$$

so beschaffen ist, dass die Anfangsbedingung $v(0) = 0$ automatisch erfüllt wird.

Tipp: Fasse die Ableitung von $x(t)$ zu einem einzigen Bruch zusammen.

Hinweis: Damit du auf jeden Fall weiter gehen kannst, finden sich ganz am Ende dieser Übungsserie die 1. und die 2. Ableitung von $x(t)$ zur Kontrolle.

(e) Zeige weiter, dass der Ansatz (4) die Differentialgleichung (3) löst, wenn die beiden Parameter A und λ passend gewählt werden.

Vorgehen: Setze die 1. und die 2. Ableitung von $x(t)$ in (3) ein. In der daraus hervorgehenden Gleichung entstehen Terme unterschiedlicher Zeitabhängigkeit: Erstens zeitlich konstante Terme, zweitens Terme mit dem Faktor $e^{2\lambda t}$ und drittens Terme mit dem Faktor $e^{4\lambda t}$. Damit die Differentialgleichung insgesamt zu jedem beliebigen Zeitpunkt t erfüllt ist, müssen jeweils alle Terme gleicher Zeitabhängigkeit separat ihren Teil der DGL erfüllen. D.h., die DGL enthält in gewisser Weise drei separate Gleichungen – eine für jede Art von Zeitabhängigkeit.

Aus diesen Gleichungen lassen sich die Ausdrücke für A und λ folgern.

(f) Bestimme jetzt auch den Parameter B so, dass $x(t)$ die zweite Anfangsbedingung $x(0) = 0$ erfüllt.

(g) Notiere $x(t)$, $v(t)$ und $a(t)$ unter Verwendung von v_e, g und m nochmals neu. Dabei ergeben sich nochmals kleine Vereinfachungen.

(h) Lasse dir in GeoGebra die realistischen Graphen zu $x(t)$, $v(t)$ und $a(t)$ aufzeichnen und überprüfe damit die Vermutungen unter (a).

(i) Nach welcher Fallstrecke hat der Springer $95\,\%$ seiner Endgeschwindigkeit v_e erreicht?

Wenn du die Aufgabe algebraisch löst, kannst du dabei alle deine Kenntnisse über Logarithmengesetze auffrischen!

5. *Nicht vergessen: Elementares Rechnen in* $\mathbb{C}$

Bestimme jeweils den Wert von $z \in \mathbb{C}$:

(a) $(3 + \mathrm{i}) \cdot z = 9 - 7\mathrm{i}$

(b) $2\mathrm{i}(\mathrm{i} - 2)(1 - \mathrm{i}) = (3\mathrm{i} - 1) \cdot z$

(c) $z = \dfrac{12 + 5\mathrm{i}}{13\mathrm{i}} - \dfrac{13\mathrm{i}}{12 + 5\mathrm{i}}$

Teillösungen zur Aufgabe 4

$$v(t) = x'(t) = A \cdot \left(\frac{2\lambda\, e^{2\lambda t}}{e^{2\lambda t} + 1} - \lambda \right) = \ldots = A\lambda \cdot \frac{e^{2\lambda t} - 1}{e^{2\lambda t} + 1}$$

$$a(t) = x''(t) = A\lambda \cdot \frac{2\lambda\, e^{2\lambda t} \cdot (e^{2\lambda t} + 1) - (e^{2\lambda t} - 1) \cdot 2\lambda\, e^{2\lambda t}}{(e^{2\lambda t} + 1)^2} = \ldots = 4A\lambda^2 \cdot \frac{e^{2\lambda t}}{(e^{2\lambda t} + 1)^2}$$

$$A = \frac{v_{\mathrm{e}}^2}{g} \qquad \text{und} \qquad \lambda = \frac{g}{v_{\mathrm{e}}} \qquad \text{und} \qquad B = -A \ln 2 = -\frac{v_{\mathrm{e}}^2}{g}\, \ln 2$$