## Übungen zur Quantenphysik

# Serie 7: Prüfungsvorbereitung Komplexe Zahlen und DGLs

### Allgemeine Informationen zur Prüfung vom Do 2.11.23

- Die Prüfung dauert **60 Minuten**.
- Die Prüfungsnote macht etwas weniger als $\frac{1}{6}$ der Gesamtnote des EFs aus ($1$ von $6.5$).

### Prüfungsinhalte

- Grundverständnis für verschiedene Zahlenmengen,
- Verständnis der Grundoperationen in $\mathbb{C}$ (inkl. grafischer Bedeutung in der komplexen Ebene),
- verschiedene Schreibweisen komplexer Zahlen (Paar-, Summenschreibweise und Euler-Darstellung) inkl. Umrechnung zwischen kartesischen und Polarkoordinaten,
- Wurzelziehen in $\mathbb{C}$,
- Lösen quadratischer Gleichungen in $\mathbb{C}$ und
- Überprüfung gegebener Lösungsansätze zu bestimmten Differentialgleichungen inkl. Bestimmung nicht festgelegter Parameter aus der DGL selber und aufgrund von Randbedingungen.

### Verweis auf Aufgaben in bisherigen Übungsserien

Die folgenden Aufgaben aus den bis dato erhaltenen Serien eignen sich ebenfalls für die Repetition resp. Prüfungsvorbereitung:

**Serie 1, Aufgabe 3:** *Elementares Rechnen mit komplexen Zahlen*

**Serie 3, Aufgabe 1:** *Konjugiert Komplexes, Betrag und Kehrwert einer komplexen Zahl*

**Serie 3, Aufgabe 2:** *Division komplexer Zahlen*

**Serie 3, Aufgabe 3:** *Der Identifikationstrick*

**Serie 3, Aufgabe 4:** *Differentialgleichungen mit gegebenem Funktionsansatz zu Ende lösen*

**Serie 4, Aufgabe 1:** *Mehr Aufgabenstellungen mit komplexen Zahlen*

**Serie 4, Aufgabe 2:** *Zwei Reibungsarten: Veranschaulichungen zum Aktionsprinzip als Differentialgleichung*

**Serie 4, Aufgabe 3:** *Horizontales "Federpendel" – die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators*

**Serie 5, Aufgabe 1:** *Umrechnung zwischen Summenschreibweise und Euler-Darstellung komplexer Zahlen*

**Serie 5, Aufgabe 2:** *Das Verständnis der Multiplikation und der Division im Komplexen*

**Serie 5, Aufgabe 3:** *Zwei kompliziertere Trainingsdifferentialgleichungen*

**Serie 5, Aufgabe 4:** *Hermitesche Polynome $H_n(x)$ und Rodrigues-Formel*

**Serie 6, Aufgabe 1:** *Komplexes Wurzelziehen*

**Serie 6, Aufgabe 2:** *Quadratische Gleichungen in $\mathbb{C}$*

**Serie 6, Aufgabe 3:** *Nicht vergessen: Elementares Rechnen in $\mathbb{C}$*

## Übungsaufgaben

1. Löse die folgenden Gleichungen in der Grundmenge $\mathbb{C}$:

   (a) $z^2 = 4$ (b) $z^2 = -3$ (c) $z^2 - 3z + 2 = 0$

   (d) $2z^2 + 32 = 0$ (e) $z^2 + 4z + 5 = 0$ (f) $z^2 + 4z - 5 = 0$

2. Ist die Aussage wahr oder falsch?

   (a) 2 ist eine reelle Zahl. (b) 2 ist eine komplexe Zahl.

   (c) $\sqrt{3}$ ist eine rationale Zahl. (d) $\pi$ ist eine komplexe Zahl.

   (e) $-\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ ist eine rein imaginäre Zahl. (f) $3 + \frac{\mathrm{i}}{2}$ ist eine imaginäre Zahl.

3. Gib das Resultat jeweils in der Summenschreibweise $x + y\mathrm{i}$ an:

   (a) $(11 - 15\mathrm{i})(-3 + 8\mathrm{i})$ (b) $(13 + 17\mathrm{i})(13 - 17\mathrm{i})$ (c) $(7 + \mathrm{i})^2$

   (d) $\dfrac{15\mathrm{i} - 12}{-6\mathrm{i}}$ (e) $\dfrac{63 + 16\mathrm{i}}{4 + 3\mathrm{i}}$ (f) $\dfrac{\frac{2}{3} + \frac{5}{6}\mathrm{i}}{\frac{1}{2} + \frac{7}{3}\mathrm{i}}$ (g) $\dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{2}\,\mathrm{i}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}\,\mathrm{i}}$

4. Löse die folgenden inhomogenen, linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit Randbedingungen:

   (a) $f'(x) = 6x^2 + 12x$ mit $f(-2) = 6$

   (b) $f'(x) = \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{4}{x^3}$ mit $f(-2) = \dfrac{1}{2}$

   (c) $f'(x) = -6\sqrt{x}$ mit $f(2) = \sqrt{2}$

   (d) $f'(x) = \dfrac{1}{x} - e^x$ mit $f(1) = 2e$

5. Berechne jeweils $-z$, $z^*$, $|z|$ und $z^{-1}$:

   (a) $z = -3 + 4\,\mathrm{i}$ (b) $z = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\,\mathrm{i}$ (c) $z = -\dfrac{3}{2}$ (d) $z = \dfrac{5}{3}\,\mathrm{i}$

6. Berechne:

   (a) $\left(-2 - 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)^4$ (b) $\mathrm{Im}\big((3\mathrm{i} - 2)^3\big)$ (c) $\mathrm{Re}\left(\left(\dfrac{1}{3} - 3\mathrm{i}\right)^3\right)$

7. Löse die folgenden Gleichungen:

   (a) $\dfrac{(1 + 2\mathrm{i})z + 2 - 3\mathrm{i}}{(5 + \mathrm{i})z + 27 - 20\mathrm{i}} = -6$ (b) $(z + 5\mathrm{i})(4 + 2\mathrm{i}) - (z + 2)(4 + 2\mathrm{i}) = 24 + 2\mathrm{i}$

   (c) $(1 + \mathrm{i})z + (5 - 3\mathrm{i})z^* = 20 + 20\mathrm{i}$

8. Löse die folgenden Gleichungssysteme für $z \in \mathbb{C}$:

   (a) $\left| \begin{array}{c} \mathrm{i}z_1 - 5z_2 = 13 \\ 2z_1 - 3\mathrm{i}z_2 = 13\mathrm{i} \end{array} \right|$ (b) $\left| \begin{array}{c} (1 + \mathrm{i})z_1 + (1 - \mathrm{i})z_2 = 2 - 2\mathrm{i} \\ (2 - 3\mathrm{i})z_1 - 3z_2 = 5 + 6\mathrm{i} \end{array} \right|$

9. Für welche Zahlen $z \in \mathbb{C}$ gilt:

   (a) $z^* = z$ (b) $-z = z$ (c) $z^{-1} = z$ (d) $-z^* = (-z)^*$ (e) $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z^*)$

10. Markiere in der komplexen Zahlenebene die folgenden Zahlenmengen:

(a) $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = 1\}$ (b) $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 5$ und $1 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 3\}$

(c) $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \cdot \mathrm{Im}(z) \leq 0\}$ (d) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ (e) $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) = 1\}$

11. Im Anfangsstadium einer Epidemie ist die Anzahl sich in einer Zeitspanne $\Delta t$ neu infizierender Menschen $\Delta N$ proportional zur Anzahl bereits infizierter Menschen $N$, denn je mehr Menschen infiziert sind, desto öfter kommen noch nicht infizierte Menschen mit Infizierten in Kontakt:

$$\Delta N = k \cdot N \cdot \Delta t \qquad \text{resp. infinitesimal:} \quad \mathrm{d}N = \lambda \cdot N \cdot \mathrm{d}t$$

Dabei ist $k$ resp. die sogenannte Wachstumskonstante $\lambda > 0$ ein Maß für die Infektionswahrscheinlichkeit beim Treffen eines infizierten mit einem nicht infizierten Menschen. Wie lautet die Infektionsfunktion $N(t)$ und wie hängt die Verdoppelungszeit $T_2$ mit der Wachstumskonstante zusammen?

12. Rechne (exakt!) in die Summenschreibweise (mit kartesischen Koordinaten) um:

(a) $2\,e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ (b) $3\sqrt{2}\,e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$ (c) $6\sqrt{2}\,e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}$ (d) $3\,e^{-\mathrm{i}\frac{13\pi}{2}}$

13. Gegeben sei die Zahl $z_1 = 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$.

(a) Wo liegt diese Zahl in der Gauss'schen Zahlenebene?

(b) Wie wird der zu $z_1$ gehörende Punkt durch Multiplikation von $z_1$ mit $z_2 = \sqrt{2}\,e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ bewegt?

(c) Wie wird der zu $z_1$ gehörende Punkt bei Division von $z_1$ durch $z_2 = \sqrt{2}\,e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ bewegt?

14. Berechne in Euler-Schreibweise ($-\pi < \varphi \leq \pi$):

(a) $\sqrt{6}\,e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \cdot \left(\sqrt{2}\,e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right)^3$ (b) $\dfrac{6\,e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{36}}}{2\,e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{9}}}$ (c) $\dfrac{\left(12\,e^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{36}}\right)^5}{\left(4\,e^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{9}}\right)^8}$

15. Bestimme das Ergebnis in Summen- **und** Euler-Schreibweise (gehe geschickt vor!):

(a) $(1+\mathrm{i}) + \sqrt{2}\,e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$ (b) $\dfrac{5\sqrt{3}}{2} + \dfrac{5}{2}\,\mathrm{i} - 5\,e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}$ (c) $(1+\mathrm{i})^{20}$

16. Klassifiziere die folgenden DGLs, verifiziere die Richtigkeit des gegebenen Ansatzes und ermittle fehlende Parameter aus den Randbedingungen:

(a) $f'' - f = x^2$ Ansatz: $f(x) = -x^2 - 2 + Ae^x + Be^{-x}$ RBs: $f(0) = 2$ und $f'(0) = 3$

(b) $f' - (2x+1)f = 2x + 1$ Ansatz: $f(x) = -1 + Ae^{x^2+x}$ RB: $f(-2) = 0$

(c) $e^f \cdot f' = 2x$ Ansatz: $f(x) = \ln(x^2 + A)$ RB: $f(e^2) = 0$

17. Löse die folgenden "Wurzelgleichungen":

(a) $z^3 = -2 + 2\sqrt{3}\mathrm{i}$ (b) $z^6 = \dfrac{1}{8}$ (c) $z^3 = -1$ (d) $z^2 = \dfrac{\sqrt{6}}{8} - \dfrac{\sqrt{2}}{8}\,\mathrm{i}$

18. Löse die folgenden quadratischen Gleichungen:

(a) $z^2 - z + 1 = 0$ (b) $z^2 - 2z + 2\mathrm{i} + 1 = 0$ (c) $z^2 + z - 3 = 2\mathrm{i}z + \mathrm{i}$

(d) $\mathrm{i}z^2 + 2z = 3\mathrm{i}$ (e) $\mathrm{i}z^2 + 3z - 2\mathrm{i} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ (f) $z^2 - (2+\mathrm{i})z = -1 - \mathrm{i}$

**Es folgen nun noch zwei Aufgaben zu DGLs mit direkt physikalischem Inhalt! Viel Vergnügen!**

19. Ganz zu Beginn unserer QM hatten wir uns mit den elektromagnetischen Wellen der klassischen Elektrodynamik Maxwells beschäftigt. Damals hatten wir mehr oder weniger einfach zur Kenntnis genommen, dass solche Wellen resp. das elektrische Feld, das zu einer solchen Welle gehört, durch die Funktion

$$E_y(x,t) = E_0 \cdot \sin(kx - \omega t) \tag{1}$$

beschrieben wird. Dies sei die Lösung der zugehörigen **Wellengleichung**

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \cdot \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \tag{2}$$

die sich aus den **Maxwell-Gleichungen** ableiten lässt (vgl. dazu Serie 1, Nachwort zu Aufgabe 1).

Damals wussten wir über Differentialgleichungen noch nicht wirklich Bescheid...

(a) Verifiziere, dass die durch (1) gegebene Welle tatsächlich die partielle Differentialgleichung (2) löst.

(b) Zeige weiter, dass die Geschwindigkeit $c$ der elektromagnetischen Wellen durch $\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ gegeben ist.
**Tipp:** $c = \lambda f$ (Wellenbeziehung) mit $\omega = 2\pi f$ und $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

20. Wir werden später sehen, dass zum **quantenmechanischen harmonischen Oszillator** die **zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung**

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \psi = E\psi \tag{3}$$

gehört. Dabei ist $\psi(x)$ der nur vom Ort $x$ abhängige Anteil der eigentlichen Wellenfunktion $\Psi(x,t)$.

$\hbar$ ist das durch $2\pi$ geteilte Planck'sche Wirkungsquantum ($\hbar := \frac{h}{2\pi}$), $m$ ist die Teilchenmasse, $\omega$ ist die Kreisfrequenz des zugehörigen klassischen harmonischen Oszillators und $E$ ist die Gesamtenergie des quantenmechanischen Oszillators.

(a) Zeige, dass der Ansatz

$$\psi(x) = A \cdot e^{-kx^2}$$

die DGL (3) löst, wenn der Parameter $k$ und die Energie $E$ ganz bestimmte Werte annehmen, die von den anderen in der DGL auftretenden Parametern abhängen.

**Tipps und Hinweise**

- Beim Ableiten des Ansatzes muss genau auf die **Produkt**- und die **Kettenregel** geachtet werden!
- Stelle die zweite Ableitung $\psi''(x) = \frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}$ als Produkt der Form $(\ldots) \cdot \psi(x)$ dar.
- Nach dem Einsetzen von $\psi(x)$ und $\psi''(x)$ in die DGL muss sich $\psi(x)$ herausstreichen. Danach enthält die Gleichung nur noch quadratische Terme (also solche mit $x^2$) und konstante Terme (ohne $x$). Da (3) für jeden beliebigen Wert der Variable $x$ stimmen soll, müssen die quadratischen und die konstanten Terme für sich alleine ihren Teil der DGL lösen. Aus dieser Überlegung folgen zwei Gleichungen, die uns auf die beiden Werte von $k$ und $E$ schließen lassen.

(b) Auf dieselbe Weise löst auch der Ansatz

$$\psi(x) = B \cdot x \cdot e^{-kx^2}$$

die obige DGL (3) des quantenmechanischen harmonischen Oszillators. Allerdings gehört zu dieser Lösung nun ein anderer Energiewert $E$. Bestimme dieses zweite mögliche Energieniveau des quantenmechanischen harmonischen Oszillators.
Überprüfe bei deiner Bearbeitung, ob $k$ immer noch denselben Wert wie vorhin aufweist.

**Nebenbei:** Diese Aufgabe nimmt ein wenig vorweg, wie die zur Quantenmechanik gehörende Mathematik – also die Schrödinger-Gleichung – die Energieniveaus von gebundenen Zuständen erzeugt. Das sehen wir hier effektiv zum ersten Mal!