Übungen zur Quantenphysik

Serie 8: Erste Wahrscheinlichkeitsverteilungen

1. *"Leichte Integralkost" zum Aufwärmen*

   Berechne die folgenden Integrale:

   (a) $\displaystyle\int_0^2 \left(x^2+1\right) \mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_0^\pi \sin x \, \mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \left(x^3-x\right) \mathrm{d}x$

   (d) $\displaystyle\int_4^9 \sqrt{x}\, \mathrm{d}x$ (e) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x$ (f) $\displaystyle\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x$

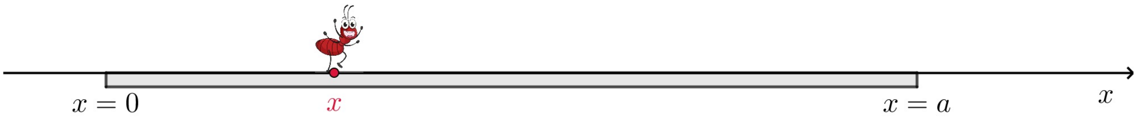
2. *Der fallende Stein (vgl. Griffiths: Beispiel 1.1 und Aufgabe 1.2)*

   Löse die **Aufgabe 1.2 auf Seite 33 im QM-Buch von Griffiths**.

   - Zu (a): Die Standardabweichung sollte man aus $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ berechnen. Dabei ist $\langle x \rangle = \frac{h}{3} \approx 0.333\, h$ ja bereits bekannt.
   - Die Lösung von (a) lautet: $\sigma = \frac{2h}{3\sqrt{5}} \approx 0.298\, h$.
   - Zu (b): Wofür steht das Integral $\int_{\langle x \rangle - \sigma}^{\langle x \rangle + \sigma} \varrho(x)\, \mathrm{d}x$?
   - Berechne bei (b) die Lösung nicht exakt, sondern lediglich auf 1 Nachkommastelle in Prozenten.

3. *Die einfachst mögliche Wahrscheinlichkeitsverteilung*

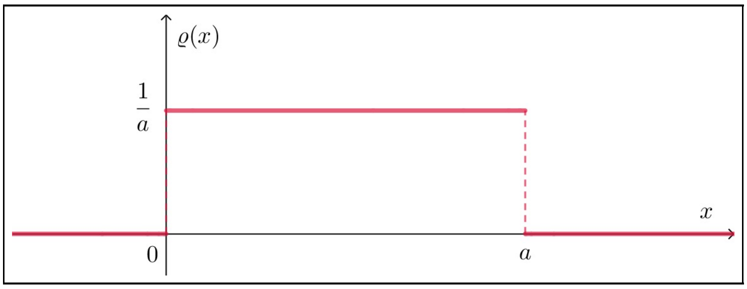
   Wir stellen uns eine Ameise (= Punkt) vor, die auf einem Stab der Länge a "gefangen" ist. Ständig spaziert sie mit konstanter Geschwindigkeit zwischen den beiden Enden hin und her, sodass jeder Aufenthaltsort gleich wahrscheinlich ist, wenn wir in einem zufälligen Moment mit einer Kamera eine Aufnahme machen.



   Somit können wir für die örtliche Wahrscheinlichkeitsdichte $\varrho(x)$ notieren:

$$\varrho(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   Dabei kommt in $\frac{1}{a}$ zum Ausdruck, dass die Gesamtwahrscheinlichkeit 1 ($= 100\,\%$) gleichmässig auf die Länge a verteilt wird. Hier der ganz einfache Graph dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung:



   (a) Überprüfe die **Normierung** dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung, also dass Gleichung (1.16) aus dem QM-Buch von Griffiths zutrifft.
   Tipp: Da $\varrho(x)$ nur zwischen 0 und a verschieden von 0 ist, gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varrho(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} \varrho(x)\,\mathrm{d}x$$

   (b) Bestimme den **Erwartungswert (= Durchschnittswert) des Ortes**, also $\langle x \rangle$.
   Zur Erinnerung: Dieser Erwartungswert ist gegeben durch:

$$\langle x \rangle = \int_{0}^{a} x\,\varrho(x)\,\mathrm{d}x$$

   (c) Berechne ebenso den mittleren quadratischen Ort $\langle x^2 \rangle$, also:

$$\langle x^2 \rangle = \int_{0}^{a} x^2\,\varrho(x)\,\mathrm{d}x$$

   (d) Gib nun mittels der Resultate aus (b) und (c) die Varianz σ^2 und die Standardabweichung σ dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung an, indem du ausnützt, dass $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$.

   (e) Ermittle die Chance p, die Ameise auf einer zufälligen Fotografie zwischen den beiden Stellen $x_1 = \langle x \rangle - \sigma$ und $x_2 = \langle x \rangle + \sigma$ zu finden.
   Tipp: Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist gegeben durch:

$$p = \int_{\langle x \rangle - \sigma}^{\langle x \rangle + \sigma} \varrho(x)\,\mathrm{d}x$$