rs, im März 2020

Weitere Aufgaben zu AF und AR

1. Handelt es sich um eine AF?
   a) $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{36}$

2. $a_1 = \frac{1}{7}$, $a_3 = \frac{1}{11}$
   a) Wie viele Glieder dieser AF sind grösser als 0?
   b) Berechnen Sie die Summe der ersten 12 Glieder.

3. Gegeben ist eine AF mit $a_1 = 20,\ n = 41, a_n = 100$.
   Berechnen Sie von dieser AF d und s_n.

4. Gegeben ist eine AF mit $a_1 = 0.5,\ d = 1, s_n = 8$.
   Berechnen Sie von dieser AF n und a_n.

5. Gegeben ist eine AF mit $d = 3,\ n = 17, a_n = 50$.
   Berechnen Sie von dieser AF a_1 und s_n.

6. Gegeben ist eine AF mit $d = \frac{4}{3},\ a_n = \frac{22}{3}, s_n = \frac{70}{3}$.
   Berechnen Sie von dieser AF a_1 und n.

7. $a_1 = 10,\ a_2 = 18$. Wie viele Glieder dieser AF sind kleiner als 1000?

8. Wie viele Glieder der AF 1, 2, … muss man, bei a_1 beginnend, mindestens addieren, wenn man mehr als 10'000 erhalten will?

9. Welche Zahl der Folge der natürlichen Zahlen ist gleich dem zehnten Teil der Summe aller vorausgehenden Zahlen?

10. Die Summe des ersten, dritten und fünften Gliedes einer AF ist 33. Das Produkt der ersten drei Folgenglieder ist 231. Berechnen Sie a_1 und d der AF.

11. Zwölf Zahlen bilden eine AF. Die Summe der beiden Mittelglieder ist 37, das Produkt von Anfangs- und Schlussglied ist 70.
    Gesucht sind die ersten drei Glieder der Folge.

12. Die Seitenlängen eines Dreiecks und der halbe Umfang des Dreiecks bilden eine viergliedrige AF. Beweisen Sie, dass das Dreieck rechtwinklig ist.

Lösungen

1. a) Ja b) Nein c) Ja d) Ja

2. a) 6 Glieder sind grösser als 0. b) Null

3. $d = 2$ und $s_{41} = 2460$

4. $n = 4$ und $a_4 = 3.5$

5. $a_1 = 2$ und $s_{17} = 442$

6. $a_1 = -\frac{2}{3}$ und $n = 7$ oder $a_1 = 2$ und $n = 5$

7. 124

8. 141

9. 21

10. $a_1 = 3$ und $d = 4$ oder $a_1 = -14$ und $d = 12.5$

11. 2, 5, 8 oder 35, 32, 29

12. Ansatz: Die kleinste Seite des Dreiecks ist a.
Dann ist die AF: $a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d$
Daraus ergibt sich der halbe Umfang: $1.5a + 1.5d$
Dieser muss gleich dem vierten Glied der AF sein: $1.5a + 1.5d = a + 3d$
Also ist $a = 3d$
Und somit haben wir die AF: $3d,\ 4d,\ 5d,\ 6d$
Dann sind also die drei Seiten des Dreiecks im Verhältnis 3:4:5 und bilden somit ein Pythagoräisches Zahlentripel! Das Dreieck ist also rechtwinklig!
qed.

rs, im März 2020

Weitere Aufgaben zu GF und GR

1. Bilden die angegebenen Zahlen den Anfang einer GF?
   Falls ja, berechnen Sie a_8 und s_8. (Näherungswerte 5-stellig)
   a) $1, 1.1, 1.21, 1.331, \ldots$ b) $0.1, 0.2, 0.4, \ldots$ c) $24, -18, 12, \ldots$

2. Von einer GF kennt man zwei Glieder. Berechnen Sie q und a_8.
   a) $a_2 = 8$ und $a_5 = 216$
   b) $a_7 = 100$ und $a_{10} = -10.5$

3. Geben Sie eine explizite Definition für a_n an:
   a) $a_1 = 4,\ \ a_2 = 5$
   b) $a_1 = 5,\ \ a_2 = 4$
   c) $a_1 = 10,\ \ a_6 = 20$
   d) $a_4 = 1.2,\ \ a_8 = 1$

4. Geben Sie eine explizite Definition für s_n an:
   a) $a_1 = 4,\ \ a_2 = 5$
   b) $a_1 = 5,\ \ a_2 = 4$
   c) $a_1 = 5,\ \ a_2 = -3$

5. Wie viele Glieder der GF 1000, 999, … sind grösser als 1?

6. Wie viele Glieder der GF 1, 1.1, … liegen zwischen 1000 und 10'000?

7. Von einer GF kennt man …
   a) $a_1 = 2$ und $s_2 = 8.\ \ s_6 = ?$ b) $s_1 = 100$ und $s_2 = 20.\ \ s_{16} = ?$

8. a) $a_1 = 1,\ q = 3,\ s_n = 364.$ Berechnen Sie von dieser GF n und a_n.
   b) $a_1 = 1,\ n = 8,\ a_n = 128.$ Berechnen Sie von dieser GF q und s_n.

9. a) $q = -0.5,\ n = 8,\ s_n = \frac{85}{32}.$ Berechnen Sie von dieser GF a_1 und a_n.
   b) $a_1 = -\frac{1}{3},\ a_n = \frac{1}{81},\ s_n = \frac{547}{81}.$ Berechnen Sie von dieser GF a_1 und n.

10. a) Zwischen 49 und 81 ist eine positive Zahl so einzuschieben, dass eine GF entsteht.
    b) Zwischen a^2 und b^2 ist ein positiver Term so einzuschieben, dass eine GF entsteht.

11. a) Zwischen 125 und 512 sind zwei Zahlen so einzuschieben, dass eine GF entsteht.
    b) Zwischen a^3 und b^3 sind zwei Terme so einzuschieben, dass eine GF entsteht.

12. a, b, c, d bilden eine wachsende Folge; a, b, c eine GF und b, c, d eine AF.
    Die Summe des ersten und des letzten Gliedes beträgt 8, die Summe aller vier Glieder 14. Berechnen Sie die vier Glieder.

Lösungen

1. a) Ja! $a_8 = 1.9487$ und $s_8 = 11.436$
   b) Ja! $a_8 = 12.8$ und $s_8 = 25.5$
   c) Nein!

2. a) $q = 3$ und $a_8 = 5832$ b) $q = -0.5$ und $a_8 = -50$

3. a) $a_n = 4 \cdot 1.25^{n-1}$
   b) $a_n = 5 \cdot 0.8^{n-1}$
   c) $a_n = 10 \cdot 2^{0.2(n-1)}$
   d) $a_n = 1.3758 \cdot 0.95544^{n-1}$ oder $a_n = -1.3758 \cdot (-0.95544)^{n-1}$

4. a) $s_n = 16 \cdot (1.25^n - 1)$
   b) $s_n = 25 \cdot (1 - 0.8^n)$
   c) $s_n = 3.125 \cdot (1 - (-0.6)^n)$

5. 6905

6. 24 Glieder $(a_{74}, \ldots, a_{97})$

7. a) $s_6 = 728$ b) $s_{16} = 53.992$

8. a) $n = 6$ und $a_6 = 243$ b) $q = 2$ und $s_8 = 255$

9. a) $a_1 = 4$ und $a_8 = -\frac{1}{32}$ b) $a_1 = 9$ und $n = 7$

10. a) 63 b) $|ab|$

11. a) 200 und 320 b) a^2b und ab^2

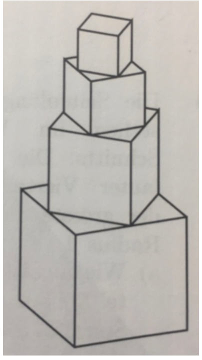
12. 0.5, 1.5, 4.5, 7.5

rs, im März 2020

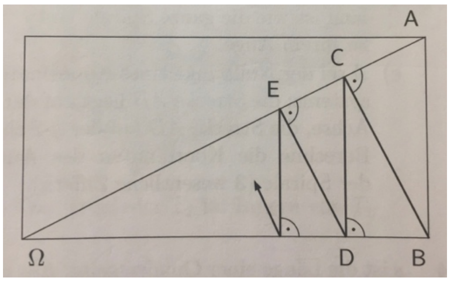
Weitere Aufgaben zu Folgen, Reihen und Grenzwerten

1. Verwandeln Sie jeweils in einen gewöhnlichen, gekürzten Bruch
   a) $0.999999\ldots = 0.\overline{9}$ b) $5.\overline{72}$ c) $2.7\overline{1828}$

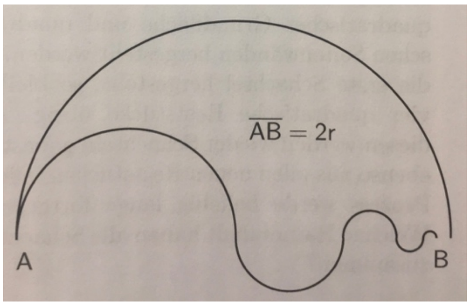
2. Einem Würfel mit der Kantenlänge 1 m wird ein zweiter Würfel so aufgesetzt, dass die Ecken der Grundfläche des zweiten Würfels auf die Kantenmitten der Deckfläche des ersten Würfels zu liegen kommen. Auf gleiche Weise wird dem zweiten Würfel ein dritter aufgesetzt usw. (siehe Skizze).
   a) Wie hoch wird der Würfelturm höchstens?
   b) Berechnen Sie den Grenzwert des Turmvolumens!



3. Wie lang ist der aus unendlich vielen Strecken zusammengesetzte Weg von A über B, C, D, … bis Ω im dargestellten Rechteck?
   $\overline{AB} = 1,\ \overline{B\Omega} = 2$



4. Der Schlangenweg von A nach B setzt sich aus unendlich vielen Halbkreisbogen zusammen, deren Radien eine GF mit dem Quotienten $q = 0.5$ bilden.
   a) Ist der Schlangenweg oder der «Halbkreisweg» von A nach B kürzer?
   b) Berechnen Sie den Flächeninhalt desjenigen Gebietes, das von sämtlichen Halbkreisen bestimmt wird.



5. Die Summe der ersten vier Glieder einer GF ist 175. Die Summe aller übrigen Glieder ist 81. Berechnen Sie a_1 und a_5.

6. Herausforderung:
   Fassen Sie den Bruch als Grenzwert einer GR auf. Bestimmen Sie diesen Grenzwert nun auf 20 Stellen nach dem Komma genau:
   a) $\frac{1}{0.998}$ b) $\frac{1}{0.997}$ c) $\frac{1}{0.99996}$

Lösungen

1. a) 1
   b) $\frac{63}{11}$
   c) $\frac{271801}{99990}$

2. a) $3.4142\ m$ b) $1.5469\ m^3$

3. $9.4721\ m$

4. a) Beide Wege haben die Länge πr.
   b) $0.4\pi r^2$

5. Da $q^4 = \frac{81}{256}$ ist, gibt es zwei Lösungen: $q_1 = \frac{3}{4}$ und $q_2 = -\frac{3}{4}$
   I $q_1 = \frac{3}{4}$, dann sind $a_1 = 64$ und $a_5 = 20.25$
   II $q_2 = -\frac{3}{4}$, dann sind $a_1 = 448$ und $a_5 = 141.75$

6. a) 1.002 004 008 016 032 064 13
   b) 1.003 009 027 081 243 731 19
   c) 1.000 040 001 600 064 002 56

Klasse 2c (150. Prom.) **Ex-Vorbereitung: Folgen & Reihen** rs, 4. Mai 2020

Aufgaben

1. Handelt es sich um eine AF oder um eine GF? **Begründen Sie!**
Berechnen Sie dann das 8. Glied a_8 und die 8. Teilsumme s_8.

a) 810, 1080, 1440, ... b) 810, 1080, 1350 ...

2. a) 18 + 19.5 + 21 + ... + 51 = ?

b) 128 + 192 + 288 + ... + 2187 = ?

c) 5 – 0.5 + 0.05 – 0.005 + / – ... = ?

3. a) Wie viele Glieder muss man addieren, damit die Summe 10 + 14 + 18 + ... grösser als 960 wird?

b) Wie viele Glieder muss man addieren, damit die Summe 10 + 14 + 19.6 + ... grösser als 10'000 wird?

4. Gegeben ist die arithmetische Folge -4, 1, 6, 11, ...

a) Geben Sie ein explizites Bildungsgesetz an und vereinfachen Sie dabei den Term so weit wie möglich.

b) Berechnen Sie a_{10} und s_{15}

5. a) Hugo Schmid muss für einen Anlass die Aula mit 270 Stühlen bestuhlen. Er beginnt in der ersten Reihe mit 22 Stühlen und stellt in jeder weiteren Reihe zwei Stühle mehr dazu.
Wie viele Reihen muss er machen?

b) Die Zählungen der Bakterien in 1 Deziliter frisch gemolkener Milch (t = 0) und nach jeder weiteren Stunde sind in der folgenden Tabelle zu sehen:

t	0	1	2	3	4	5
p	42	59	82	115	162	226

Wie viele Bakterien werden es nach 9 Stunden, resp. nach 15 Stunden sein?

6. Gegeben ist die geometrische Folge 10, 11, 12.1, 13.31, ...

a) Geben Sie ein explizites Bildungsgesetz an und vereinfachen Sie dabei den Term so weit wie möglich.

b) Berechnen Sie a_5 (alle Stellen)

c) Berechnen Sie s_{10} (alle Stellen!)

d) Geben Sie eine allgemeine Formel für s_n an und vereinfachen Sie den Term so weit wie möglich.

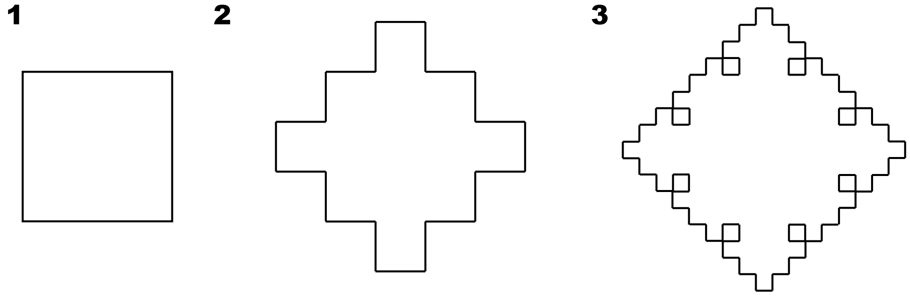
7. Handelt es sich um eine geometrische Folge? Begründen Sie! Wenn ja, berechnen Sie a_8 und s_8

a) 2, $2^{0.5}$, 1, ... b) 24, -36, 54, ...

8. Hat die Reihe einen Grenzwert? Wenn ja, geben Sie ihn an!
a) 81 + 54 + 36 + ...
b) 3.6 + 5.4 + 8.1 + ...
c) 20 + 18 + 16 + 14 + ...
d) 1 - 0.9 + 0.81 - 0.729 + ...
e) 60 + 30 + 20 + 15 + 12 + ...

9. 2.7272727272.... = a/b. Berechnen Sie den gewöhnlichen Bruch als Grenzwert einer geometrischen Reihe.
Resultat: in einem Bruch und gekürzt.

10. Hier sehen sie 3 Generationen eines Fraktals. So wächst es: in der neuen Generation wird jede Kante von der vorhergehenden Generation gedrittelt und dann ein Quadrat über den mittleren Teil der Kante gesetzt. Und so weiter...



a) Berechnen Sie den Flächeninhalt der zweiten und der dritten Generation, wenn das Quadrat der ersten Generation die Fläche 1 m^2 hat!

b) Welchem Grenzwert nähert sich der Flächeninhalt, wenn der Prozess sich immer weiter fortsetzt? Berechnen Sie diesen!

c) Zeigen Sie, dass der Umfang der Figuren keinen Grenzwert hat!

11. Minnie Mouse zahlt jeden Monat 100 Taler in ein Festgeldzinskonto ein und zwar immer am Anfang des Monats. Sie malt sich aus, dass sie dann einmal mit Micky Mouse eine Weltreise unternehmen kann. Sie hat am 1. 1. 2020 gestartet.
Wie viele Taler hat sie am 1. 1. 2023, wenn das Geld mit einem Monatszins von 0.5% verzinst wird? (Und der Zins jeden Monat zum Kapital dazugeschlagen wird?) Machen Sie die GR sichtbar!
Wieviel Zinsen hat sie insgesamt erhalten?

12. Donald Duck hat sich dummerweise auf Kredit einen neuen Wagen gekauft, um seinen Onkel zu beeindrucken. Es war zwar ein Occasions-Cabriolet, aber es hat ihn trotzdem 10'000 Taler gekostet.
Wie gross muss seine monatliche Rate sein, wenn der Kredit mit 15% Jahreszins verzinst wird und er das Auto nach 5 Jahren abbezahlt haben will? Er hat das Auto Anfang Monat gekauft und zahlt die Raten immer Ende Monat.

13. Gegeben ist die Zahlenfolge (a_n) mit $a_n = \frac{n^2-1}{2n-1}$. Begründen Sie präzise wieso diese Zahlenfolge keinen Grenzwert (im eigentlichen Sinn) hat.

14. Gegeben ist die Zahlenfolge (a_n) mit $a_n = \frac{3-4n}{2n-1}$.

a) Bestimmen Sie den Grenzwert a der Folge.

b) Ich gebe Ihnen ε = 1/10000 vor. Ab welcher Nummer n unterscheiden sich die Folgeglieder um weniger als ε vom Grenzwert a?

15. Schreiben Sie die Summen aus!

a) $\sum_{i=3}^{10}(i^3)$ b) $\sum_{i=0}^{9}\left(\frac{1}{i+1}\right)$ c) $\sum_{k=10}^{20}(2k-1)$

16. Kürzen Sie die Summe mit einem Summenzeichen ab und achten Sie auf dessen korrekten Gebrauch:
a) 5 + 7 + 9 + 11 + ... + 41 + 43
b) 4 + 16 + 36 + 64 + 100 + 144 + 196 + 256 + 324

Viel Erfolg!

Lösungen

1. a) $1080/810 = 1440/1080 = 4/3 = q$ => GF => $a_8 = 163840/27 = 6068.1$,
   $s_8 = 589750/27 = 21842.6$

   b) $1350 - 1080 = 1080 - 810 = 270 = d$ => AF => $a_8 = 2700$, $s_8 = 14040$

2. a) AR mit $d = 1.5$, $n = 23$, $S_{23} = 793.5$
   b) GR mit $q = 1.5$, $n = 8$, $S_8 = 6305$
   c) Unendliche GR mit $a_1 = 5$, $q = (-0.1)$ ➔ $|q| < 1$ ➔ $s = 50/11$

3. a) AR, $a_1 = 10$, $d = 4$, $s_n = n/2\cdot(20 + (n-1)\cdot 4) = 960$ ➔ $n = 20$ (zweite Lösung negativ!)
   ➔ Man muss mindestens 21 Glieder addieren.

   b) GR, $a_1 = 10$, $q = 1.4$,
   ➔ $s_n = 10 \cdot (1 - 1.4^n)/ (-0.4) = (-25)\cdot(1 - 1.4^n) = 25\cdot(1.4^n - 1) = 10000 \Leftrightarrow 1.4^n - 1 = 400$
   $\Leftrightarrow 1.4^n = 401 \Leftrightarrow n = \ln(401)/\ln(1.4) = 17.8...$
   ➔ Man muss mindestens 18 Glieder addieren.

4. a) $a_n = -4 + (n-1)\cdot 5 = 5n - 9$ b) $a_{10} = 41$ und $s_{15} = 465$

5. a) Hier handelt es sich um eine arithmetische Folge (AF): $a_1 = 22$, $d = 2$, $s_n = 270$
   ➔ $n = 9$, es sind also 9 Sitzreihen! (Die zweite Lösung $n = -30$ macht keinen Sinn!)
   b) q ist immer etwa gleich gross, nämlich zwischen 1.3898 und 1.4087, also handelt es sich näherungsweise um eine GF mit $q = 1.4$ und $a1 = 42$. ➔
   Nach 9 Stunden ist es also
   Nach 15 Stunden ist es also

6. a) $a_n = 10\cdot(11/10)^{n-1} = (100/11)\cdot 1.1^n$ b) 14.641 c) 159.37424601 d) $s_n = 100\cdot(1.1^n - 1)$

7. a) ja, $q = 1/2^{0.5}$ $a_8 \approx 0.17678$; $s_8 \approx 6.40165$

   b) ja, $q = -1.5$ $a_8 = -410.0625$; $s_8 = -236.4375$

8. a) GR mit $a_1 = 81$ und $q = 2/3$ => Grenzwert $s = 243$
   b) GR mit $q > 1$ => kein Grenzwert
   c) AR => kein Grenzwert!
   d) GR mit $a_1 = 1$ und $q = (-0.9)$ => Grenzwert $s = 10/19$
   e) Keine GR! Es ist $a_n = 60/n$. Die Glieder bilden zwar auch eine Nullfolge, aber die Reihe wächst über alle Grenzen. Letzteres müssen Sie nicht beweisen können, aber seien Sie vorsichtig, wenden Sie die Grenzwertformel der GR nur für die GR an!

9. $q = 1/100$ ➔ $2.7272727272... = 2 + 8/11 = 30/11$

10. a) $A_1 = 1\ m^2$; $A_2 = 1.44\ m^2$; $A_3 = 1.69\ m^2$

    b) $A_4 = 1 + 4/9 + 20/81 + 100/729$
    Die GF beginnt erst bei 4/9!
    Daraus ergibt sich die GR mit $a_1 = 4/9$; $q = 5/9$! ➔ Summe der GR = 1 ➔ A = 2

    c) $U_1 = 4$; $U_2 = 20/3$; $U_3 = 100/9$ usw.
    Man erhält eine GF mit $q = 5/3 > 1$.
    Diese Folge hat keinen Grenzwert, die Glieder wachsen über alle Grenzen.

11. $K_1 = 100$; Die folgenden Summen sollten Sie selbst herleiten können!
    $K_2 = 100\cdot 1.005 + 100$;
    $K_3 = 100\cdot 1.005^2 + 100\cdot 1.005 + 100$

$K_n = 100 + 100 \cdot 1.005 + 100 \cdot 1.005^2 + ... + 100 \cdot 1.005^{n-2} + 100 \cdot 1.005^{n-1} = 100 \cdot (1-1.005^n)/(-0.005)$
$= 20'000 \cdot (1.005^n - 1)$
K_{36} = 3933.61 Taler
Zinsen: Sie hat 3600 Taler eingezahlt => 333.61 Taler Zinsen

12. Monatsaufzinsfaktor: $1.15^{1/12} = r$
S_0 = 10'000; Die folgenden Summen sollten Sie selbst herleiten können!
$S_1 = 10'000 \cdot r - \text{Rate}$
$S_2 = 10'000 \cdot r^2 - \text{Rate} \cdot r - \text{Rate}$
$S_3 = 10'000 \cdot r^3 - \text{Rate} \cdot r^2 - \text{Rate} \cdot r - \text{Rate} = 10'000 \cdot r^3 - (\text{Rate} \cdot r^2 + \text{Rate} \cdot r + \text{Rate})$
...
$S_n = 10'000 \cdot r^n - (\text{Rate} + \text{Rate} \cdot r + \text{Rate} \cdot r^2 + ... + \text{Rate} \cdot r^{n-1}) = 10'000 \cdot r^n - \text{Rate} \cdot (1-r^n)/(1-r)$
$S_{60} = 0$ => Rate = 852.86 Taler

13. Kürzen Sie den Bruchterm mit n. Der Nenner hat dann den Grenzwert 2, aber der Zähler wächst über alle Grenzen. Damit wachsen die Bruchterme a_n für $n \to \infty$ über alle Grenzen.

14. a) a = -2
b) n > 5000.5 ➔ Ab Glied Nummer 5001.

15. a) $3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 + 10^3$
b) 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10
c) 19 + 21 + 23 + 25 + ... + 37 + 39

16. a) $\sum_{i=2}^{21}(2i+1)$ b) $\sum_{i=1}^{9}(2i)^2$

Lösungen

1. a) $1080/810 = 1440/1080 = 4/3 = q$ => GF => $a_8 = 163840/27 = 6068.1$,
   $s_8 = 589750/27 = 21842.6$

   b) $1350 – 1080 = 1080 – 810 = 270 = d$ => AF => $a_8 = 2700$, $s_8 = 14040$

2. a) AR mit $d = 1.5$, $n = 23$, $S_{23} = 793.5$
   b) GR mit $q = 1.5$, $n = 8$, $S_8 = 6305$
   c) Unendliche GR mit $a_1 = 5$, $q = (-0.1)$ ➔ $|q| < 1$ ➔ $s = 50/11$

3. a) AR, $a_1 = 10$, $d = 4$, $s_n = n/2\cdot(20 + (n-1)\cdot 4) = 960$
   ➔ $s_n = \frac{n}{2}(20 + (n-1)\cdot 4) = \cdots = 10n + 2n^2 - 2n = 960 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 + 4n - 480 = 0$
   ➔ $\Leftrightarrow \quad (n-20)(n+24) = 0$ ➔ $n = 20$ (die zweite Lösung negativ, nämlich -24)
   ➔ Man muss also mindestens 21 Glieder addieren.

   b) GR, $a_1 = 10$, $q = 1.4$,
   ➔ $s_n = 10 \cdot \frac{1-1.4^n}{1-1.4} = 10 \cdot \frac{1-1.4^n}{-0.4} = (-25)\cdot(1 - 1.4^n) = 10'000$
   ➔ $\Leftrightarrow \quad 1 - 1.4^n = -400 \quad \Leftrightarrow \quad 401 = 1.4^n \quad \Leftrightarrow \quad n = \frac{\ln(401)}{\ln(1.4)} \cong 17.8$
   ➔ Man muss also mindestens 18 Glieder addieren.

4. a) $a_n = -4 + (n-1)\cdot 5 = 5n – 9$ b) $a_{10} = 41$ und $s_{15} = 465$

5. a) Hier handelt es sich um eine arithmetische Folge (AF): $a_1 = 22$, $d = 2$, $s_n = 270$
   ➔ $n = 9$, es sind also 9 Sitzreihen! (Die zweite Lösung $n = -30$ macht keinen Sinn!)
   b) q ist immer etwa gleich gross, nämlich zwischen 1.3898 und 1.4087, also handelt es sich näherungsweise um eine GF mit $q = 1.4$ und $a_0 = 42$. ➔ $a_n = 42 \cdot 1.4^n$
   Nach 9 Stunden werden es also $a_9 = 42 \cdot 1.4^9 \cong 868$ Bakterien sein.
   Nach 15 Stunden ist es also werden es also $a_{15} = 42 \cdot 1.4^{15} \cong 6534$ Bakterien sein.

6. a) $a_n = 10\cdot(11/10)^{n-1} = (100/11)\cdot 1.1^n$ b) 14.641 c) 159.37424601 d) $s_n = 100\cdot(1.1^n – 1)$

7. a) ja, $q = \frac{2^{0.5}}{2} = \frac{1}{2^{0.5}}$ oder $q = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ➔ $a_8 \approx 0.17678$ und $s_8 \approx 6.40165$
   b) ja, $q = \frac{-36}{24} = \frac{54}{-36} = -\frac{3}{2} = -1.5$ ➔ $a_8 = -410.0625$ und $s_8 = -236.4375$

8. a) GR mit $a_1 = 81$ und $q = 2/3$ ➔ Grenzwert $s = 243$
   b) GR mit $q > 1$ ➔ kein Grenzwert
   c) AR ➔ kein Grenzwert!
   d) GR mit $a_1 = 1$ und $q = (-0.9)$ ➔ Grenzwert $s = 10/19$
   e) Keine GR! Es ist $a_n = 60/n$. Die Glieder bilden zwar auch eine Nullfolge, aber die Reihe wächst über alle Grenzen. Letzteres müssen Sie nicht beweisen können, aber seien Sie vorsichtig, wenden Sie die Grenzwertformel der GR nur für die GR an!

9. $q = 1/100$ ➔ $2.7272727272... = 2 + 8/11 = 30/11$

10. a) $A_1 = 1\ m^2$; $A_2 = 1.44\ m^2$; $A_3 = 1.69\ m^2$

    b) $A_4 = 1 + 4/9 + 20/81 + 100/729$
    Die GF beginnt erst bei 4/9! Daraus ergibt sich die GR mit $a_1 = 4/9$; $q = 5/9$!
    ➔ Da q<1 konvergiert die unendliche GR und es ist: $s = \frac{4/9}{1-5/9} = \frac{4/9}{4/9} = 1$ ➔ $A = 1 + 1 = 2$

c) $U_1 = 4$; $U_2 = 20/3$; $U_3 = 100/9$ usw.
Man erhält eine GF mit $q = 5/3 > 1$.
Diese Folge hat keinen Grenzwert, die Glieder wachsen über alle Grenzen.

11. $K_1 = 100$; Die folgenden Summen sollten Sie selbst herleiten können!
$K_2 = 100 \cdot 1.005 + 100$;
$K_3 = 100 \cdot 1.005^2 + 100 \cdot 1.005 + 100$
$K_n = 100 + 100 \cdot 1.005 + 100 \cdot 1.005^2 + \ldots + 100 \cdot 1.005^{n-2} + 100 \cdot 1.005^{n-1} =$

$$= 100 \cdot \frac{1 - 1.005^n}{1 - 1.005} = 100 \cdot \frac{1 - 1.005^n}{-0.005} = 20'000 \cdot (1 - 1.005^n)$$

➔ $K_{36} = 20'000 \cdot (1 - 1.005^{36}) \cong 3'933.61$ Taler
➔ Zinsen: Sie hat $36 \cdot 100 = 3'600$ Taler eingezahlt
➔ Also hat sie $3'933.61 - 3'600 = 333.61$ Taler nur für die Zinsen gezahlt!

12. Monatsaufzinsfaktor: $r = 1.15^{1/12} = \sqrt[12]{1.15} \cong 1.0117$
$s_0 = 10'000$; Die folgenden Summen sollten Sie selbst herleiten können!
$s_1 = 10'000 \cdot r - \text{Rate}$
$s_2 = 10'000 \cdot r^2 - \text{Rate} \cdot r - \text{Rate}$
$s_3 = 10'000 \cdot r^3 - \text{Rate} \cdot r^2 - \text{Rate} \cdot r - \text{Rate} = 10'000 \cdot r^3 - (\text{Rate} \cdot r^2 + \text{Rate} \cdot r + \text{Rate})$
...

$s_n = 10'000 \cdot r^n - (\text{Rate} + \text{Rate} \cdot r + \text{Rate} \cdot r^2 + \ldots + \text{Rate} \cdot r^{n-1})$

$$s_n = 10'000 \cdot r^n - Rate \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

➔ $s_{60} = 0$ ➔ Rate = 852.86 Taler

13. Kürzen Sie den Bruchterm mit n. Der Nenner hat dann den Grenzwert 2, aber der Zähler wächst über alle Grenzen. Damit wachsen die Bruchterme a_n für $n \to \infty$ über alle Grenzen.
Oder mit der Regel: Der ZG = 2 und der NG = 1. Also hat die Folgen keinen GW!

14. a) Gemäss den Regeln ist der GW $a = -2$.
b) $\left|\frac{3-4n}{2n-1} - (-2)\right| = \left|\frac{3-4n}{2n-1} - \frac{(-2)(2n-1)}{2n-1}\right| = \left|\frac{3-4n+4n-2}{2n-1}\right| = \left|\frac{1}{2n-1}\right| < \varepsilon \underset{n>1}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{2n-1} < \varepsilon$

$\frac{1}{\varepsilon} < 2n - 1 \iff \frac{1}{\varepsilon} + 1 < 2n \iff \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2} < n \iff n > \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2}$

➔ Für $\varepsilon = \frac{1}{10'000}$ wird $n > \frac{1}{2/10'000} + \frac{1}{2} = \frac{1}{1/5'000} + \frac{1}{2} = 5'000 + \frac{1}{2} = 5'000.5$
➔ Also ab Glied Nummer 5001.

15. a) $3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 + 10^3$
b) 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10
c) 19 + 21 + 23 + 25 + ... + 37 + 39

16. a) $\sum_{i=2}^{21}(2i + 1)$ b) $\sum_{i=1}^{9}(2i)^2$