Algebra – Lösungen zu Übungsserie 11.A

1. Wir erhalten via Mitternachtsformel:

   (a) $x_{1/2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{49}}{4} = \dfrac{1 \pm 7}{4} = \dfrac{-6}{4}$ oder $\dfrac{8}{4} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{-\dfrac{3}{2}, 2\right\}}}$

   (b) $x_{1/2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{20}}{2} = \dfrac{-6 \pm 2\sqrt{5}}{2} = \underline{\underline{-3 \pm \sqrt{5}}}$

   (c) $x_{1/2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 360 \cdot (-\frac{1}{4})}}{2 \cdot 360} = \dfrac{1 \pm \sqrt{361}}{720} = \dfrac{1 \pm 19}{720} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{-\dfrac{1}{40}, \dfrac{1}{36}\right\}}}$

   (d) $x_{1/2} = \dfrac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 5 \cdot 4}}{2 \cdot 8} = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 80}}{16} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{\,\}}}$

   (e) $x_{1/2} = \dfrac{8\sqrt{3} \pm \sqrt{(8\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \dfrac{8\sqrt{3} \pm \sqrt{48}}{2} = \dfrac{8\sqrt{3} \pm 4\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{2\sqrt{3}, 6\sqrt{3}\right\}}}$

   (f) $x_{1/2} = \dfrac{\pm\sqrt{3^2 - 4 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{5}}}{2 \cdot \frac{5}{2}} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 2}}{5} = \underline{\underline{\dfrac{3 \pm \sqrt{7}}{5}}}$

   (g) $x_{1/2} = \dfrac{-\frac{1}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = -\dfrac{1}{3} \pm \sqrt{\dfrac{4}{9}} = -\dfrac{1}{3} \pm \dfrac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{-1, \dfrac{1}{3}\right\}}}$

   (h) $x_{1/2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}}{2 \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{9}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{-1 \pm 3}{2\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{-\sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}}}$

   (i) $77x^2 + 11x - 66 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 7x^2 + x - 6 = 0$

   $\Rightarrow \quad x_{1/2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 7 \cdot 6}}{2 \cdot 7} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{169}}{14} = \dfrac{-1 \pm 13}{14} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{-1, \dfrac{6}{7}\right\}}}$

2. Wir lösen je zweimal:

   (a) Mit Zweiklammeransatz: $x^2 - 5x - 14 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)(x-7) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{-2, 7\}}}$
   Mit MNF: $x_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 + 4 \cdot 14}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25+56}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{5 \pm 9}{2} = -2$ oder $7 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{-2, 7\}}}$
   Mit Zweiklammeransatz ist diese Aufgabe sicher schneller gelöst!

   (b) Mit Zweiklammeransatz: $2x^2 - 5x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2x+1)(x-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{-\frac{1}{2}, 3\}}}$
   Mit MNF: $x_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4} = \frac{12}{4}$ oder $-\frac{2}{4} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{-\frac{1}{2}, 3\}}}$
   Wer den Zweiklammeransatz gut beherrscht, ist damit sicher wieder schneller.

   (c) Mit Ausklammern und binomischer Formel:
   $17x^2 - \frac{169}{17} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - \frac{169}{17^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{13}{17}\right)\left(x - \frac{13}{17}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = \pm\frac{13}{17}}}$
   Mit MNF: $x_{1/2} = \dfrac{0 \pm \sqrt{0^2 + 4 \cdot 17 \cdot \frac{169}{17}}}{2 \cdot 17} = \frac{\pm\sqrt{4 \cdot 169}}{34} = \pm\frac{2 \cdot 13}{34} = \underline{\underline{\pm\frac{13}{17}}}$
   Wenn man sich die ursprüngliche QG kurz anschaut, merkt man sehr schnell, dass es sich um den Spezialfall $b = 0$ handelt und man somit sehr gut (und rasch) ohne MNF zum Ziel kommt.

(d) Mit binomischer Formel: $9x^2 - 30x + 25 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (3x-5)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{5}{3}}}$

Mit MNF: $x_{1/2} = \frac{30 \pm \sqrt{30^2 - 4 \cdot 9 \cdot 25}}{2 \cdot 9} = \frac{30 \pm \sqrt{900-900}}{18} = \frac{30}{18} = \underline{\underline{\frac{5}{3}}}$

Wer die binomische Formel erkennt, ist sehr rasch fertig.

(e) Nach kurzer Betrachtung merkt man: $\frac{1}{1000} + x^2$ ist stets größer als 0, denn $x^2 \geq 0$. Folglich ist $\underline{\underline{\mathbb{L} = \{\,\}}}$.

Mit MNF: $x_{1/2} = \dfrac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1000}}}{2 \cdot 1} = \pm \dfrac{\sqrt{-\frac{1}{250}}}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{\,\}}}$ (Wurzel von negativer Zahl)

Lieber zuerst rasch die Aufgabe überblicken und sehen, was da für ein Ausdruck steht, anstatt blind mit der MNF zu rechnen beginnen.

(f) Ausklammern und Zweiklammeransatz:

$x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 + 3x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2x-1)(x+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{-2, \frac{1}{2}\right\}}}$

Mit MNF: $\dfrac{-\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}}{2} = \dfrac{-\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}}{2} = -\frac{3 \pm 5}{4} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{-2, \frac{1}{2}\right\}}}$

Wiederum ist die Arbeit mit der MNF langwieriger. Wer drauskommt, ist mit Ausklammern und Klammeransatz viel schneller unterwegs.

Allgemeines Fazit aus Aufgabe 2: Die Mitternachtsformel ist wirklich Ultima Ratio (= letztes Mittel) zur Lösung einer QG! Man sollte es immer zuerst mit einer anderen Methode probieren. Wenn das funktioniert, ist man stets viel schneller und in der Regel auch sicherer unterwegs.

3. **Zur Verdeutlichung:** Wir benutzen die quadratische Ergänzung aktuell kaum mehr für das Lösen einer quadratischen Gleichung. Dafür ist das Verfahren zu umständlich. Es ist aber trotzdem wertvoll, dass wir diese mathematische Technik jetzt kennengelernt haben. Wir wollen sie nicht vergessen!

(a) $3x^2 + 2x + \frac{1}{3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x + \frac{1}{3})^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = -\frac{1}{3}}}$

(b) $x^2 + 8x - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 8x + 16 - 16 - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+4)^2 = 21 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = -4 \pm \sqrt{21}}}$

(c) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x - 11 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{1}{2}x - 33 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} - 33 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x + \frac{1}{4})^2 = \frac{529}{16} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-1 \pm 23}{4} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{-6, \frac{11}{2}\}}}$

(d) $x^2 - 4x + 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 4 - 4 + 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2 + 3 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x-2)^2 = -3 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{\,\}}}$

(e) $x^2 + 2ax - b^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2ax + a^2 - a^2 - b^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+a)^2 - a^2 - b^2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x+a)^2 = a^2 + b^2 \quad \Leftrightarrow \quad x + a = \pm\sqrt{a^2 + b^2} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x_{1/2} = -a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}}$

(f) $x^2 - 4cx + d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4cx + 4c^2 - 4c^2 + d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 2c)^2 - 4c^2 + d = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x-2c)^2 = 4c^2 - d \quad \Leftrightarrow \quad x - 2c = \pm\sqrt{4c^2 - d} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x_{1/2} = 2c \pm \sqrt{4c^2 - d}}}$

4. Aus der Diskriminante ergibt sich die Anzahl Lösungen:

(a) $D = 100^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 10\,000 - 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ <u>2 Lösungen</u>

(b) $D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -23 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ <u>keine Lösung</u>

(c) Multipliziere mit $\frac{10}{3} \quad \Rightarrow \quad x^2 - 8x + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad$ <u>1 Lösung</u>

(d) $D = 25^2 - 4 \cdot 16 \cdot 10 = 625 - 640 = -15 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ <u>keine Lösung</u>

(e) $D = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 144 - 144 = 0 \quad \Rightarrow \quad$ <u>1 Lösung</u>

(f) $D = 19^2 - 4 \cdot 6 \cdot 15 = 361 - 360 = 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ <u>2 Lösungen</u>

5. Wir formen die Gleichung jeweils so um, dass sich eine quadratische Gleichung in Normalform ergibt, die sich dann wie gewohnt lösen lässt (durch Ausklammern, binomische Formeln, Zweiklammeransatz oder schlimmstenfalls mit der MNF):

   (a) $9(x-10)-x(x-15)=x \quad\Leftrightarrow\quad x^2-23x+90=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-5)(x-18)=0 \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{\mathbb{L}=\{5,18\}}}$

   (b) $(5+x)(5-x)=(x+3)^2-(x-4)^2 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+14x-32=0$
   $\Leftrightarrow\quad (x+16)(x-2)=0 \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{\mathbb{L}=\{-16,2\}}}$

   (c) $3(x^2+2)-x(x+9)=11 \quad\Leftrightarrow\quad 2x^2-9x-5=0 \quad\Leftrightarrow\quad (2x+1)(x-5)=0 \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{\mathbb{L}=\{-\frac{1}{2},5\}}}$

   (d) $\frac{2x}{x+1}-\frac{4}{x-1}=-1 \quad\Rightarrow\quad 2x(x-1)-4(x+1)=-(x+1)(x-1)$ mit $x\neq\pm1$
   $\Leftrightarrow\quad 3x^2-6x-5=0 \quad\Rightarrow\quad x_{1/2}=\frac{6\pm\sqrt{36+60}}{6}=\frac{6\pm4\sqrt{6}}{6}=\underline{\underline{\frac{3\pm2\sqrt{6}}{3}}}$ ✓

   (e) $\frac{2x+1}{3}-\frac{x^2+x-1}{5}=1-x \quad\Leftrightarrow\quad 3x^2-22x+7=0 \quad\Leftrightarrow\quad (3x-1)(x-7)=0 \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{\mathbb{L}=\{\frac{1}{3},7\}}}$

   (f) $x^3+19=(x+4)^3 \quad\Leftrightarrow\quad 12x^2+48x+45=0 \quad\Leftrightarrow\quad 4x^2+16x+15=0$
   $\Leftrightarrow\quad (2x+5)(2x+3)=0 \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{\mathbb{L}=\{-\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\}}}$

   (g) $x^3=(x+3)(x-4)(x+6) \quad\Leftrightarrow\quad x^3=(x+3)(x^2+2x-24)$
   $\Leftrightarrow\quad x^3=x^3+5x^2-18x-72 \quad\Leftrightarrow\quad 5x^2-18x-72=0$
   $\Rightarrow\quad x_{1/2}=\frac{18\pm\sqrt{18^2+4\cdot5\cdot72}}{2\cdot5}=\frac{18\pm\sqrt{18(18+20\cdot4)}}{10}=\frac{18\pm\sqrt{18\cdot98}}{10}=\frac{18\pm\sqrt{36\cdot49}}{10}=\frac{18\pm42}{10} \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{\mathbb{L}=\{-\frac{12}{5},6\}}}$

   (h) $(x-1)^4-35=x(x+2)^3-10x^2\left(x+\frac{1}{2}\right)$
   $\Leftrightarrow\quad x^4-4x^3+6x^2-4x+1-35=x^4+6x^3+12x^2+8x-10x^3-5x^2$
   $\Leftrightarrow\quad x^2+12x+34=0 \quad\Rightarrow\quad x_{1/2}=\frac{-12\pm\sqrt{12^2-4\cdot1\cdot34}}{2\cdot1}=\frac{-12\pm\sqrt{144-132}}{2}=\frac{-12\pm2\sqrt{3}}{2}=\underline{\underline{-6\pm\sqrt{3}}}$

   (i) $(\frac{x-5}{6})^2+(\frac{x-2}{3})^2=(\frac{x-1}{2})^2 \quad\Leftrightarrow\quad x^2-10x+25+4x^2-16x+16=9x^2-18x+9$
   $\Leftrightarrow\quad 4x^2+8x-32=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+2x-8=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x+4)(x-2)=0 \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{\mathbb{L}=\{-4,2\}}}$

   (j) $(x+\frac{1}{3})^3-(x-\frac{1}{3})^3=(\frac{1}{3}+x)(\frac{1}{3}-x) \quad\Leftrightarrow\quad x^3+x^2+\frac{x}{3}+\frac{1}{27}-x^3+x^2-\frac{x}{3}+\frac{1}{27}=\frac{1}{9}-x^2$
   $\Leftrightarrow\quad 3x^2-\frac{1}{27}=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2-\frac{1}{81}=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x+\frac{1}{9})(x-\frac{1}{9})=0 \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{x=\pm\frac{1}{9}}}$