Algebra – Lösungen zu Übungsserie 11.B

1. (a) n sei die kleinere der beiden Zahlen, $(n+50)$ folglich die grössere. Dann ist gemäss Aufgabentext:

$$n \cdot (n+50) = n + (n+50) + 50 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 + 48n - 100 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (n+50)(n-2) = 0$$

In Frage kommen also 2 und 52 oder -50 und 0. In beiden Fällen lässt sich leicht überprüfen, dass die Forderung der Aufgabenstellung erfüllt wird: $2 \cdot 52 = (2+52)+50$ und $-50 \cdot 0 = (-50+0)+50$. Da die einzelne Lösung gemäss Fragestellung ein Zahlenpaar (a,b) ist, lautet die korrekt notierte Lösungsmenge $res\mathbb{L} = \{(2,52),(-50,0)\}$.

(b) n sei die kleinste der sechs Zahlen. Die restlichen fünf Zahlen sind folglich $(n+1)$ bis $(n+5)$. Aus dem Text folgt, dass gelten muss:

$$n \cdot (n+1) = 3 \cdot \big((n+2)+(n+3)+(n+4)+(n+5)\big)$$
$$\Leftrightarrow \quad n^2 + n = 3(4n+14) \quad \Leftrightarrow \quad n^2 - 11n - 42 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (n-14)(n+3) = 0$$

Da n natürlich sein soll, kommt nur $\underline{\underline{n = 14}}$ als kleinste Zahl in Frage.

(c) x sei die gesuchte Zahl. Den Text übersetzen wir zu folgender Gleichung:

$$(x^2-100)-200 = 300-x \quad \Leftrightarrow \quad x^2+x-600 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+25)(x-24) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{-25, 24\}}}$$

Tatsächlich kommen beide Lösungen in Frage, wie man überprüfen kann.

(d) Aus der Aufgabenstellung ergeben sich zwei Fälle:

Fall 1: $x + \frac{6}{25} = \sqrt{x}$ und **Fall 2:** $x - \frac{6}{25} = \sqrt{x}$

Ich betrachte zuerst Fall 1:

$$x + \frac{6}{25} = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad x^2 + \frac{12}{25}x + \frac{36}{25^2} = x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - \frac{13}{25}x + \frac{36}{25^2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{4}{25}\right)\left(x - \frac{9}{25}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{4}{25} \quad \text{oder} \quad x_2 = \frac{9}{25}$$

Durch Zurückeinsetzen kann man sehen, dass diese beiden Lösungen tatsächlich in Frage kommen.
Zu Fall 2:

$$x - \frac{6}{25} = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad x^2 - \frac{12}{25}x + \frac{36}{25^2} = x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - \frac{37}{25}x + \frac{36}{25^2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{25}\right)\left(x - \frac{36}{25}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_3 = \frac{1}{25} \quad \text{oder} \quad x_4 = \frac{36}{25}$$

Hier kommt x_3 nicht in Frage, denn $\frac{1}{25} - \frac{6}{25} = -\frac{5}{25}$, was nicht gleich einer Wurzel sein kann. (Wurzeln sind per Definition positiv!)
x_4 geht aber in Ordnung und so lautet die vollständige Lösungsmenge: $\underline{\underline{\mathbb{L} = \{\frac{4}{25}, \frac{9}{25}, \frac{36}{25}\}}}$.

2. Bei allen Aufgaben geht es erstens um die Diskriminante (Lösbarkeitskriterium: $D \geq 0$) und zweitens um die ganze Mitternachtsformel. Da in den Aufgaben die Parameter a, b und c verwendet werden, notiere ich die MNF rasch neu mit anderen Parametern, damit anschliessend keine Verwirrung entsteht:

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_{1/2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

   (a) $A = 1$, $B = 1$ und $C = a \Rightarrow D = B^2 - 4AC = 1 - 4a$.
   Für genau 1 Lösung muss $D = 0$ und somit $\underline{\underline{a = \frac{1}{4}}}$ sein.
   Für 2 Lösungen muss $D > 0$ und somit dann $\underline{\underline{a < \frac{1}{4}}}$ sein.
   Falls Lösungen existieren, so lauten sie $\underline{\underline{x_{1/2} = \frac{-1\pm\sqrt{1-4a}}{2}}}$.

   (b) $A = 4$, $B = b$ und $C = 1 \Rightarrow D = B^2 - 4AC = b^2 - 16$.
   1 Lösung: $D = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{b = \pm 4}}$. 2 Lösungen: $D > 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{|b| > 4}}$.
   Falls Lösungen existieren, so lauten sie $\underline{\underline{x_{1/2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-16}}{8}}}$.

   (c) $A = 2$, $B = 5a$ und $C = 3a^2 \Rightarrow D = B^2 - 4AC = 25a^2 - 24a^2 = a^2$.
   1 Lösung: $D = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{a = 0}}$. 2 Lösungen: $D > 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{a \neq 0}}$.
   Die Lösungsmenge lautet $\underline{\underline{\mathbb{L} = \{-a, -\frac{3}{2}\,a\}}}$. Falls es nur 1 Lösung gibt ($a = 0$), so ist dies $\underline{\underline{x = 0}}$.

   (d) $A = a$, $B = 6$ und $C = -2 \Rightarrow D = B^2 - 4AC = 36 + 8a = 4(9 + 2a)$.
   1 Lösung: $D = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{a = -\frac{9}{2}}}$. 2 Lösungen: $D > 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{a > -\frac{9}{2}}}$.
   Falls Lösungen existieren, so lauten sie $\underline{\underline{x_{1/2} = \frac{-3\pm\sqrt{9+2a}}{a}}}$.
   Allerdings: a darf nicht gleich Null sein, sonst ist die ursprüngliche Gleichung nicht mehr quadratisch und auch obige Lösungsformel versagt. Für $a = 0$ ergäbe sich eine lineare Gleichung mit Lösung $x = \frac{1}{3}$.

   (e) $A = c$, $B = -(2c + 1)$ und $C = 1 \Rightarrow D = B^2 - 4AC = (2c + 1)^2 - 4c = 4c^2 + 1$.
   Es existieren stets 2 Lösungen, denn $D > 0$ für alle Werte des Parameters c ausser $c = 0$. In letzterem Fall ist die ursprüngliche Gleichung nicht mehr quadratisch und die Formel unten versagt wegen der 0 im Nenner. Mit $c = 0$ würde die Gleichung linear und die Lösung wäre $x = 1$.
   Die beiden Lösungen lauten $\underline{\underline{x_{1/2} = \frac{2c+1\pm\sqrt{4c^2+1}}{2c}}}$.

   (f) $A = a$, $B = -2a$ und $C = a + 1 \Rightarrow D = B^2 - 4AC = 4a^2 - 4a(a + 1) = -4a$.
   2 Lösungen: $D > 0 \Leftrightarrow \underline{a < 0}$.
   Falls Lösungen existieren, so lauten sie $\underline{\underline{x_{1/2} = \frac{a\pm\sqrt{-a}}{a} = 1 \pm \frac{\sqrt{-a}}{a}}}$.
   Achtung! a darf nicht gleich Null sein, denn dann wäre die ursprüngliche Gleichung nicht mehr quadratisch. Es ergäbe sich gar keine Lösung mehr, denn mit $a = 0$ würde die ursprüngliche Gleichung zu $1 = 0$. Der Fall $D = 0$ und somit der Fall einer einzigen Lösung existiert hier nicht!

3. (a) $x^2 + 5x - 24 = (x + 8)(x - 3)$
   (b) $2x^2 + 7x - 4 = (2x - 1)(x + 4) = 2(x - \frac{1}{2})(x + 4)$
   (c) $\frac{1}{100}\,x^2 - \frac{9}{10}\,x - 10 = \frac{1}{100}(x^2 - 90x - 1000) = \frac{1}{100}(x + 10)(x - 100)$
   (d) $4x^2 - 24x + 35 = (2x - 7)(2x - 5) = 4(x - \frac{7}{2})(x - \frac{5}{2})$
   (e) $7x^2 + \frac{41}{3}\,x + 6 = 7(x + \frac{9}{7})(x + \frac{2}{3})$ nach anspruchsvoller MNF-Anwendung:
   $\frac{-\frac{41}{3}\pm\sqrt{\frac{41^2}{3^2}-4\cdot 7\cdot 6}}{14} = \frac{-\frac{41}{3}\pm\sqrt{\frac{1681-1512}{9}}}{14} = \frac{-\frac{41}{3}\pm\sqrt{\frac{169}{9}}}{14} = \frac{-\frac{41}{3}\pm\frac{13}{3}}{14} = -\frac{2}{3}$ oder $-\frac{9}{7}$
   (f) keine Faktorisierung möglich, denn $D = b^2 - 3b^2 = -2b^2 < 0$.

4. (a) $y = x - 10 \Rightarrow y^2 - 8y + 15 = 0 \Leftrightarrow (y-3)(y-5) = 0 \Leftrightarrow x - 10 = 3$ oder $5 \Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{L} = \{13, 15\}}}$
   (b) $y = 2x + 1 \Rightarrow y^2 + 7y - 18 = 0 \Leftrightarrow (y+9)(y-2) = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = -9$ oder $2 \Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{L} = \{-5, \frac{1}{2}\}}}$
   (c) $y = \frac{1}{2}x - 2 \Rightarrow y^2 - 7y + 10 = 0 \Leftrightarrow (y-2)(y-5) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x - 2 = 2$ oder $5 \Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{L} = \{8, 14\}}}$
   (d) $y = 2x - 5 \Rightarrow y^2 - \frac{1}{3}y - 8 = 0 \overset{\text{MNF}}{\Leftrightarrow} 2x - 5 = -\frac{8}{3}$ oder $3 \Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{L} = \{\frac{7}{6}, 4\}}}$
   (e) Der Winkel α soll zwischen $0°$ und $90°$ liegen, weil wir die Definition des Tangens für beliebige Winkel noch nicht kennen gelernt haben.
   $y = \tan(\alpha) \Rightarrow 3y^2 - 4\sqrt{3}\,y + 3 = 0 \overset{\text{MNF}}{\Leftrightarrow} \tan(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ oder $\sqrt{3} \Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{L} = \{30°, 60°\}}}$
   (f) Der Winkel α soll auch hier zwischen $0°$ und $90°$ liegen, weil wir auch die Definition des Sinus für beliebige Winkel noch nicht kennen gelernt haben.
   $y = \sin(\alpha) \Rightarrow 2y^2 - 9y + 4 = 0 \overset{\text{MNF}}{\Leftrightarrow} \sin(\alpha) = \frac{1}{2}$ oder $4 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 30°}}$ $(\sin(\alpha) \leq 1$ für alle α!)

5. (a) Sind x_1 und x_2 die Lösungen von $ax^2 + bx + c = 0$, so muss sich $ax^2 + bx + c$ faktorisiert schreiben lassen in der Form

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - axx_1 - axx_2 + ax_1x_2$$

   Durch Zusammenfassen rechts folgt:

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 \quad \overset{-ax^2}{\Leftrightarrow} \quad bx + c = -a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$$

   Damit diese beiden Seiten für jedes beliebige x identisch sind, müssen die linearen und die konstanten Glieder einzeln übereinstimmen. Es muss also gelten:

$$bx \overset{!}{=} -a(x_1 + x_2)x \qquad \text{und} \qquad c = ax_1x_2$$

   Mit der Division beider Gleichungen durch $-ax$ resp. durch a folgt daraus der Satz von Vieta:

$$-\frac{b}{a} = x_1 + x_2 \qquad \text{und} \qquad \frac{c}{a} = x_1x_2$$

   Alternativ kann man den Satz auch mit der Mitternachtsformel beweisen: Sind x_1 und x_2 die beiden Lösungen von $ax^2 + bx + c = 0$, so folgt aus der Mitternachtsformel:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

   Ebenso kann man für das Produkt beider Lösungen folgern (3. binomische Formel):

$$x_1x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b^2 - \left(\sqrt{b^2 - 4ac}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

   (b) Der Satz von Vieta dürfte wohl nützlich sein, wenn man bei einer quadratischen Gleichung die eine Lösung bereits kennt und dann entweder fehlende Parameter in der Gleichung und/oder die zweite Lösung zu bestimmen hat. Genau dies ist bei den Aufgaben unter (c) zu tun!
   (c) i. $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow x_2 = -\frac{b}{a} - x_1 = -\frac{4}{1} - 7 = -11$
   $\Rightarrow \frac{c}{a} = x_1x_2 \Rightarrow u = c = ax_1x_2 = 1 \cdot 7 \cdot (-11) = -77$
   Die QG lautet also: $x^2 + 4x - 77 = 0$ und hat die Lösungen $x_1 = 7$ und $x_2 = -11$.
   ii. $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow x_2 = -\frac{b}{a} - x_1 = -\frac{-17}{12} - \frac{2}{3} = \frac{17-8}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$
   $\Rightarrow \frac{c}{a} = x_1x_2 \Rightarrow u = c = ax_1x_2 = 12 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = 6$
   Die QG lautet also: $12x^2 - 17x + 6 = 0$ und hat die Lösungen $x_1 = \frac{2}{3}$ und $x_2 = \frac{3}{4}$.
   iii. x_1 einsetzen liefert: $4u - 118 + 70 = 0 \Leftrightarrow u = \frac{48}{4} = 12$
   Jetzt folgt mit dem Satz von Vieta: $x_2 = -\frac{b}{a} - x_1 = -\frac{59}{12} - (-2) = \frac{-59+24}{12} = -\frac{35}{12}$
   Die QG lautet also: $12x^2 + 59x + 70 = 0$ und hat die Lösungen $x_1 = -2$ und $x_2 = -\frac{35}{12}$.
   iv. $x_1x_2 = \frac{c}{a} \Leftrightarrow x_2 = \frac{c}{ax_1} = \frac{45}{4 \cdot \frac{9}{2}} = \frac{5}{2}$
   $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow b = -a(x_1 + x_2) = -4(\frac{9}{2} + \frac{5}{2}) = -28$
   Die QG lautet also: $4x^2 - 28x + 45 = 0$ und hat die Lösungen $x_1 = \frac{9}{2}$ und $x_2 = \frac{5}{2}$.