Algebra – Lösungen zu Übungsserie 12

1. Stets muss die Probe entscheiden, ob die gefundenen Lösungen tatsächlich stimmen:

   (a) $\sqrt{2x+1} = 3 \quad\Rightarrow\quad 2x+1 = 9 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{x=4}$

   Probe: $\sqrt{2\cdot 4+1} = \sqrt{9} = 3 \quad \checkmark \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{x=4}}$

   (b) $\sqrt{3x-2} = -4 \quad\Rightarrow$ geht nicht, denn Wurzeln sind per Defininition positiv! $\Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{\}}}$

   (c) $\sqrt{x^2-16} = 2-x \quad\Rightarrow\quad x^2-16 = 4-4x+x^2 \quad\Leftrightarrow\quad 4x = 20 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{x=5}$

   Probe: $\sqrt{5^2-16} = \sqrt{9} = 3$ und $2-5 = -3 \;\lightning \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{\}}}$

   (d) $\sqrt{x+5} = \sqrt{4-x} \quad\Rightarrow\quad x+5 = 4-x \quad\Leftrightarrow\quad 2x = -1 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{x = -\frac{1}{2}}$

   Probe: $\sqrt{-\frac{1}{2}+5} = \sqrt{\frac{9}{2}}$ und $\sqrt{4-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\frac{9}{2}} \quad\checkmark\quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{x = -\frac{1}{2}}}$

   (e) $10\sqrt{40-x} = 40\sqrt{10-x} \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{40-x} = 4\sqrt{10-x} \quad\Rightarrow\quad 40-x = 16(10-x) \quad\Leftrightarrow\quad \underline{x=8}$

   Probe: $10\sqrt{40-8} = 10\sqrt{32} = 40\sqrt{2}$ und $40\sqrt{10-8} = 40\sqrt{2} \quad\checkmark\quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{x=8}}$

   (f) $\sqrt{x+8} = \sqrt{2}+\sqrt{6} \quad\Rightarrow\quad x+8 = 2+2\sqrt{2\cdot 6}+6 \quad\Leftrightarrow\quad x = 2\sqrt{12} = \underline{4\sqrt{3}}$

   Probe: $\sqrt{4\sqrt{3}+8} = ???$

   Die Probe lässt zunächst keinen direkten Schluss auf die Richtigkeit des Resultates zu.
   Klar ist aber, dass unter der Wurzel ein positiver Wert steht. Und damit können wir überlegen:
   Sind a und b zwei positive Zahlen und stimmen ihre Quadrate a^2 und b^2 überein, so müssen a und b ebenfalls gleich sein. Somit dürfen wir bei der Probe quadrieren.

   $\left(\sqrt{4\sqrt{3}+8}\right)^2 = 4\sqrt{3}+8$ und $\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2 = 2+2\sqrt{12}+6 = 8+4\sqrt{3} \quad\checkmark\quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{x = 4\sqrt{3}}}$

   (g) $5\sqrt{x^2-1}-4x = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 5\sqrt{x^2-1} = 4x \quad\Rightarrow\quad 25(x^2-1) = 16x^2 \quad\Leftrightarrow\quad 9x^2-25 = 0$

   $\Leftrightarrow\quad (3x+5)(3x-5) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{x = \pm\frac{5}{3}}$

   Proben: $5\sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2-1}-4\cdot\frac{5}{3} = 5\sqrt{\frac{16}{9}}-\frac{20}{3} = \frac{20}{3}-\frac{20}{3} = 0 \quad\checkmark$

   $5\sqrt{\left(-\frac{5}{3}\right)^2-1}-4\cdot\left(-\frac{5}{3}\right) = 5\sqrt{\frac{16}{9}}+\frac{20}{3} = \frac{20}{3}+\frac{20}{3} \neq 0 \;\lightning\quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{x = \frac{5}{3}}}$

   (h) $\sqrt{x+6} = x \quad\Rightarrow\quad x+6 = x^2 \quad\Leftrightarrow\quad x^2-x-6 = 0$

   $\Leftrightarrow\quad (x-3)(x+2) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{x=3 \text{ oder } x=-2}$

   $x=-2$ geht sicher nicht: Wurzel links ist per Definition positiv, wenn sie existiert!

   Probe: $\sqrt{3+6} = \sqrt{9} = 3 \quad\checkmark\quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{x=3}}$

   (i) $4\left(\sqrt{x+5}-2\right) = x \quad\Leftrightarrow\quad 4\sqrt{x+5} = x+8 \quad\Rightarrow\quad 16(x+5) = x^2+16x+64$

   $\Leftrightarrow\quad x^2-16 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{x = \pm 4}$

   Proben: $4\left(\sqrt{4+5}-2\right) = 4(3-2) = 4$

   $4\left(\sqrt{-4+5}-2\right) = 4(1-2) = -4 \quad\checkmark\quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{x = \pm 4}}$

2. (a) Wir lösen die erste Gleichung:

$$\sqrt{x+1} = x-5 \quad\Rightarrow\quad x+1 = x^2-10x+25 \quad\Leftrightarrow\quad x^2-11x+24=0$$
$$\Leftrightarrow\quad (x-3)(x-8)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{x=3 \text{ oder } x=8}$$

$x=3$ geht nicht, denn damit wäre $x-5=3-5=-2$. Die Wurzel links muss aber positiv sein. Machen wir mit $x=8$ noch die Probe:

$$\sqrt{8+1}=\sqrt{9}=3 \quad\text{und}\quad 8-5=3 \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{x=8}}$$

Jetzt machen wir dasselbe mit der zweiten Wurzelgleichung:

$$\sqrt{x+1} = 5-x \quad\Rightarrow\quad x+1 = 25-10x+x^2 \quad\Leftrightarrow\quad x^2-11x+24=0$$
$$\Leftrightarrow\quad (x-3)(x-8)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{x=3 \text{ oder } x=8}$$

Wir haben genau die gleichen Resultatvorschläge erhalten! Nun geht allerdings $x=8$ nicht, denn damit wäre rechts $5-x=5-8=-3$, was nicht mit der Wurzel links übereinstimmen kann.
Dafür geht nun $x=3$:

$$\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2 \quad\text{und}\quad 5-3=2 \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{x=3}}$$

Halten wir fest: Es ergeben sich nach dem Quadrieren die gleichen Gleichungen und Lösungsvorschläge, aber in den beiden Fällen kommt je nur ein Vorschlag zum Zug.

(b) Lösen wir auch hier die erste Gleichung:

$$\sqrt{13-4x} = 4-x \quad\Rightarrow\quad 13-4x = 16-8x+x^2 \quad\Leftrightarrow\quad x^2-4x+3=0$$
$$\Leftrightarrow\quad (x-1)(x-3)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{x=1 \text{ oder } x=3}$$

Proben: $\sqrt{13-4\cdot 1}=\sqrt{9}=3 \quad\text{und}\quad 4-1=3 \quad\checkmark$

$\sqrt{13-4\cdot 3}=\sqrt{1}=1 \quad\text{und}\quad 4-3=1 \quad\checkmark \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{\mathbb{L}=\{1,3\}}}$

Hier gehen bei der ersten Gleichung offensichtlich beide Lösungen. Zweite Gleichung?

$$\sqrt{13-4x} = x-4 \quad\Rightarrow\quad 13-4x = x^2-8x+16 \quad\Leftrightarrow\quad x^2-4x+3=0$$
$$\Leftrightarrow\quad (x-1)(x-3)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{x=1 \text{ oder } x=3}$$

Hier kommen aber beide Lösungsvorschläge nicht in Frage, denn auf der rechten Gleichungsseite wären sowohl $1-4=-3$, als auch $3-4=-1$ negativ und könnten somit nicht gleich der Wurzel links sein. Als Lösung ergibt sich somit die leere Menge: $\underline{\underline{\mathbb{L}=\{\,\}}}$.

Auch in diesem Beispiel sind die Gleichungen nach dem Quadrieren identisch und ergeben somit dieselben Lösungsvorschläge. Dabei kamen im einen Fall beide Lösungen, im anderen keine in Frage.

Zu beiden Beispielen kann man abschliessend sagen, dass aus der identischen Menge an Lösungsvorschlägen jede Lösung nur bei der einen oder anderen Gleichung korrekt ist.

3. Für die Lösungen erhalten wir (nach Probe!):

(a) $\sqrt{x^2+4x+8}+x=0 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{x^2+4x+8}=-x \quad\Rightarrow\quad x^2+4x+8=x^2 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{x=-2}$

Probe: $\sqrt{(-2)^2+4(-2)+8}-2=\sqrt{4-8+8}-2=\sqrt{4}-2=0 \quad\checkmark \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{x=-2}}$

(b) $\sqrt{x}+3=\sqrt{x+11} \quad\Rightarrow\quad x+6\sqrt{x}+9=x+11 \quad\Leftrightarrow\quad 6\sqrt{x}=2$

$\Leftrightarrow\quad 3\sqrt{x}=1 \quad\Rightarrow\quad 9x=1 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{x=\frac{1}{9}}$

Probe: $\sqrt{\frac{1}{9}}+3=\frac{1}{3}+3=\frac{10}{3} \quad\text{und}\quad \sqrt{\frac{1}{9}+11}=\sqrt{\frac{100}{9}}=\frac{10}{3} \quad\checkmark \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{x=\frac{1}{9}}}$

(c) $\sqrt{x}+\sqrt{x+4}=4 \quad\Rightarrow\quad x+2\sqrt{x^2+4x}+x+4=16 \quad\Leftrightarrow\quad 2\sqrt{x^2+4x}=12-2x$

$\Leftrightarrow\quad \sqrt{x^2+4x}=6-x \quad\Rightarrow\quad x^2+4x=36-12x+x^2 \quad\Leftrightarrow\quad 16x=36 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{x=\frac{9}{4}}$

Probe: $\sqrt{\frac{9}{4}}+\sqrt{\frac{9}{4}+4}=\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=4 \quad\checkmark \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{x=\frac{9}{4}}}$

(d) $4=\sqrt{40-x}-\sqrt{x} \quad\Rightarrow\quad 16=40-x-2\sqrt{40x-x^2}+x \quad\Leftrightarrow\quad 2\sqrt{40x-x^2}=24$

$\Leftrightarrow\quad \sqrt{40x-x^2}=12 \quad\Rightarrow\quad 40x-x^2=144 \quad\Leftrightarrow\quad x^2-40x+144=0$

$\Leftrightarrow\quad (x-4)(x-36)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{x=4 \text{ oder } x=36}$

Proben: $\sqrt{40-4}-\sqrt{4}=6-2=4 \quad\checkmark$

$\sqrt{40-36}-\sqrt{36}=2-6=-4 \quad ↯ \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{x=4}}$

(e) $\frac{\sqrt{x-3}}{2}=\sqrt{\frac{x^2-7}{12}} \quad\Rightarrow\quad \frac{x-3}{4}=\frac{x^2-7}{12} \quad\Leftrightarrow\quad 3(x-3)=x^2-7$

$\Leftrightarrow\quad x^2-3x+2=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-1)(x-2)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{x=1 \text{ oder } x=2}$

Probe: Beide Lösungsvorschläge scheitern bereits in der ersten Wurzel! $\quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{\mathbb{L}=\{\}}}$

(f) $\frac{\sqrt{x^2-9}}{6}+\sqrt{3x+5}=\sqrt{x^2-9}-\frac{\sqrt{3x+5}}{4} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{5}{4}\sqrt{3x+5}=\frac{5}{6}\sqrt{x^2-9}$

$\Leftrightarrow\quad 3\sqrt{3x+5}=2\sqrt{x^2-9} \quad\Rightarrow\quad 9(3x+5)=4(x^2-9) \quad\Leftrightarrow\quad 4x^2-27x-81=0$

$\Leftrightarrow\quad (4x+9)(x-9)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{x=-\frac{9}{4} \text{ oder } x=9}$

$x=-\frac{9}{4}$ scheitert in der ersten Wurzel, denn: $\left(-\frac{9}{4}\right)^2-9=\frac{81}{16}-\frac{144}{16}<0$

Probe: $\frac{\sqrt{9^2-9}}{6}+\sqrt{3\cdot 9+5}=\frac{\sqrt{72}}{6}+\sqrt{32}=\frac{6\sqrt{2}}{6}+4\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

und $\sqrt{9^2-9}-\frac{\sqrt{3\cdot 9+5}}{4}=\sqrt{72}-\frac{\sqrt{32}}{4}=6\sqrt{2}+\sqrt{2}=5\sqrt{2} \quad\checkmark \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{x=9}}$

4. Wir formen Schritt für Schritt um:

$$
\begin{aligned}
& & \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} && \mid (\ldots)^2 \\
&\Rightarrow & \gamma^2 &= \frac{1}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} && \mid \cdot \left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \\
&\Leftrightarrow & \gamma^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) &= 1 && \mid : \gamma^2 \\
&\Leftrightarrow & 1-\frac{v^2}{c^2} &= \frac{1}{\gamma^2} && \mid \cdot c^2 \\
&\Leftrightarrow & c^2-v^2 &= \frac{c^2}{\gamma^2} && \mid +v^2-\frac{c^2}{v^2} \\
&\Leftrightarrow & c^2-\frac{c^2}{\gamma^2} &= v^2 && \mid \sqrt{\ldots} \\
&\Rightarrow & v &= \sqrt{c^2-\frac{c^2}{\gamma^2}} && \mid \text{teilweise radizieren} \\
&\Leftrightarrow & & \underline{\underline{v=c\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}}} &&
\end{aligned}
$$

5. Bei diesen letzten Wurzelgleichungen ergibt sich:

(a) $3\sqrt{x-1} = \sqrt{x^2+9} \quad \Rightarrow \quad 9(x-1) = x^2+9 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-9x+18=0$

$\Leftrightarrow \quad (x-3)(x-6)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x=3 \text{ oder } x=6}$

Proben: $3\sqrt{3-1} = 3\sqrt{2}$ und $\sqrt{3^2+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ ✓

$3\sqrt{6-1} = 3\sqrt{5}$ und $\sqrt{36^2+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ ✓ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\mathbb{L} = \{3,6\}}}$

(b) $\sqrt{2x^3-6x+5} = x^2+x-3 \quad \Rightarrow \quad 2x^3-6x+5 = x^4+x^2+9+2x^3-6x^2-6x$

$\Leftrightarrow \quad x^4-5x^2+4=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)(x-1)(x+2)(x-2)=0$

$\Leftrightarrow \quad \underline{x=\pm 1 \text{ oder } x=\pm 4}$

Proben: $\sqrt{2\cdot 1^3-6\cdot 1+5} = \sqrt{1} = 1$ und $1^2+1-3=-1$ ↯

$\sqrt{2\cdot(-1)^3-6\cdot(-1)+5} = \sqrt{9} = 3$ und $(-1)^2-1-3=-3$ ↯

$\sqrt{2\cdot 2^3-6\cdot 2+5} = \sqrt{9} = 3$ und $2^2+2-3=3$ ✓

$\sqrt{2\cdot(-2)^3-6\cdot(-2)+5} = \sqrt{1} = 1$ und $(-2)^2-2-3=-1$ ↯ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{x=2}}$

(c) $\sqrt{6-x}+\sqrt{2x+1} = \sqrt{x+7} \quad \Rightarrow \quad 6-x+2\sqrt{6+11x-2x^2}+2x+1 = x+7$

$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{6+11x-2x^2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad 6+11x-2x^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad (6-x)(1+2x)=0$

$\Leftrightarrow \quad \underline{x=6 \text{ oder } x=-\frac{1}{2}}$

Proben: $\sqrt{6-6}+\sqrt{2\cdot 6+1} = \sqrt{13}$ und $\sqrt{6+7} = \sqrt{13}$ ✓

$\sqrt{6+\frac{1}{2}}+\sqrt{-1+1} = \sqrt{\frac{13}{2}}$ und $\sqrt{-\frac{1}{2}+7} = \sqrt{\frac{13}{2}}$ ✓ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{6, -\frac{1}{2}\right\}}}$

(d) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-11} = \sqrt{x+13} \quad \Rightarrow \quad x-2+2\sqrt{x^2-13x+22}+x-11 = x+13$

$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{x^2-13x+22} = 26-x \quad \Rightarrow \quad 4\left(x^2-13x+22\right) = 676-52x+x^2$

$\Leftrightarrow \quad 4x^2-52x+88 = 676-52x+x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2-588=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-196=0$

$\Leftrightarrow \quad (x+14)(x-14)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x=\pm 14}$

Proben: $\sqrt{14-2}+\sqrt{14-11} = 2\sqrt{3}+\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ und $\sqrt{14+13} = 3\sqrt{3}$ ✓

$\sqrt{-14-2}+\sqrt{-14-11} = \sqrt{-16}+\sqrt{-25}$geht nicht! $\Rightarrow$ $\underline{\underline{x=14}}$