Algebra – Lösungen zu Übungsserie 2

1. (a) $34 \cdot 53 + 53 \cdot 26 = 53 \cdot 60 = 3180$

   (b) $287 : 3 + 313 : 3 = 600 : 3 = 200$

   (c) $998 \cdot 21 = (1000 - 2) \cdot 21 = 21\,000 - 42 = 20958$

   (d) $21 \cdot 56 + 34 \cdot 21 = 21 \cdot 90 = 1890$

   (e) $462 : 3 - 159 : 3 = 303 : 3 = 101$

   (f) $377 : 13 = (390 - 13) : 13 = 30 - 1 = 29$

   (g) $12\,948 : 13 = (13\,000 - 52) : 13 = 1000 - 4 = 996$

   (h) $14 \cdot (11 + 6 + 52) = 14 \cdot (70 - 1) = 980 - 14 = 966$

   (i) $(5^3 + 5^2) : 5^2 = 5 + 1 = 6$

   (j) $(3^{26} - 3^{24}) : 3^{23} = 3^3 - 3 = 24$

   (k) $(273 + 2100) : 21 = 13 + 100 = 113$

   (l) $11^2 + 9^2 = 121 + 81 = 202$, (m) $31 \cdot 9998 = 31 \cdot (10\,000 - 2) = 31\,000 - 62 = 30\,938$

   (n) $707\,000 : 7000 = (700\,000 + 7000) : 7000 = 100 + 1 = 101$

   (o) $62 \cdot 48 + 31 \cdot 104 = 62 \cdot (48 + 52) = 6200$

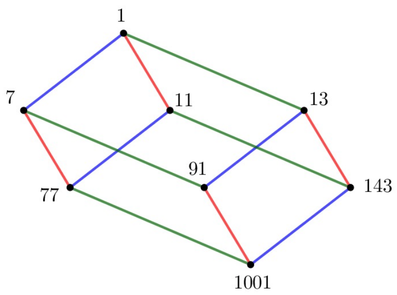
2. Die Primfaktorzerlegungen lauten:

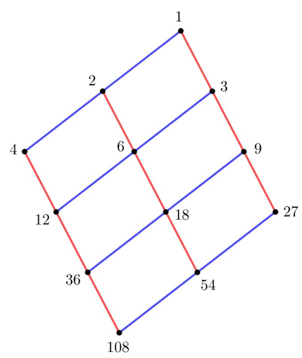
   $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$

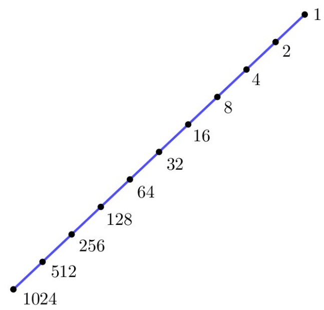
   $108 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

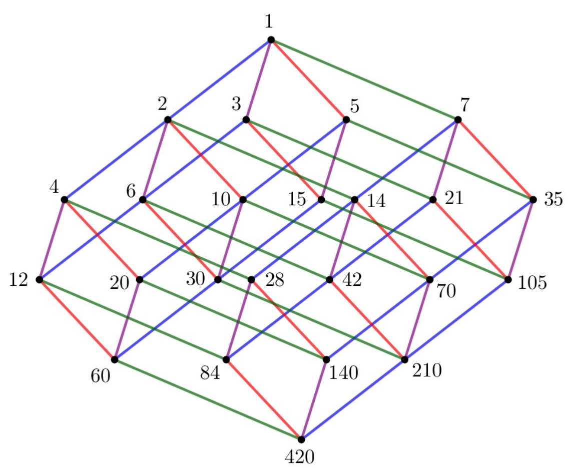
   $1024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

   $420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$









3. (a) 8 Teiler von 2^0 bis 2^7

   (b) $n+1$ Teiler von 5^0 bis 5^n

   (c) $12 = 4 \cdot 3$ Teiler

   (d) $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \Rightarrow 24 = 4 \cdot 3 \cdot 2$ Teiler

4. (a) $(101\,100 : 50 - 2^{10}) \cdot 2 : 28 = (101\,100 : 100 - 2^9) \cdot 28 = (1011 - 512) \cdot 28$
   $= 499 \cdot 28 = (500 - 1) \cdot 28 = (1000 - 2) \cdot 14 = 14\,000 - 28 = 13\,972$

   (b) $\left(17^2 \cdot 3 + 39 - 3 \cdot 200\right)^2 = \left(3 \cdot (17^2 + 13 - 200)\right)^2 = \left(3 \cdot (289 + 13 - 200)\right)^2$
   $= (3 \cdot 102)^2 = 306^2 = 306 \cdot (300 + 6) = 91\,800 + 1836 = 93\,636$

5. (a) $\mathrm{QS} = 27 \Rightarrow$ richtig

   (b) Endziffer 5 und $\mathrm{QS} = 15 \Rightarrow$ richtig

   (c) $\mathrm{QS} = 21$ und $336 : 8 = 42 \Rightarrow$ richtig

   (d) gerade und $\mathrm{AQS} = 11 \Rightarrow$ richtig

   (e) $\mathrm{QS} = 25 \Rightarrow$ nicht durch 3 teilbar $\Rightarrow$ falsch

   (f) $\mathrm{QS} = 54$ und $\mathrm{AQS} = 0 \Rightarrow$ richtig

   (g) $\mathrm{QS} = 18$ und $76 : 4 = 19 \Rightarrow$ richtig

   (h) $\mathrm{QS} = 22$ und $\mathrm{AQS} = 0 \Rightarrow$ falsch (nur durch 11 teilbar)

   (i) QS von $21\,471 = 15 \Rightarrow 21\,471$ ist durch 3 teilbar, folglich enthält $21\,471^2$ zwei Faktoren 3 und ist somit durch 9 teilbar

6. Es ist: $\mathrm{T}_{120} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120\}$.

   Behalte von dieser Menge nur diejenigen Zahlen n, für die auch $n+2$ in dieser Menge enthalten ist $\Rightarrow \mathbb{L} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$.

7. (a) Falsch! Gegenbeispiel: $10 = 2 \cdot 5$ und $21 = 3 \cdot 7$.

   (b) Richtig! Die Aussage folgt aus der Primzahldefinition.

   (c) Falsch! Gegenbeispiel: 2 und $6 = 2 \cdot 3$.

   (d) Stimmt vermutlich! Bis zum heutigen Tag hat man zu dieser sogenannten **Goldbach'schen Vermutung** kein Gegenbeispiel gefunden, aber man hat es auch noch nicht fertig gebracht sie zu beweisen...

8. Der Ausdruck $n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$ mit $n \in \mathbb{N}$ steht für das Produkt aus drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen.

   Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist mindestens eine dieser drei Zahlen gerade, also durch 2 teilbar, und mindestens eine davon ist durch 3 teilbar, also ist $a = n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$ sicher durch 6 teilbar.

9. (a) $n = 1$: $2 \sqsubset 6$
   $n = 2$: $4 \not\sqsubset 7$
   $n = 3$: $6 \not\sqsubset 8$
   $n = 4$: $8 \not\sqsubset 9$
   $n = 5$: $10 \sqsubset 10$
   Zahlen $n > 5$ müssen nicht überprüft werden, weil dann $2n > n + 5$.
   Die einzigen beiden Zahlen sind somit $n = 1$ und $n = 5$.

(b) $n = 1$: $0 \not\sqsubset 2$ (0 ist kein Teiler von irgendeiner Zahl!)
$n = 2$: $1 \sqsubset 3$
$n = 3$: $2 \sqsubset 4$
$n = 4$: $3 \not\sqsubset 5$
$n = 5$: $4 \not\sqsubset 6$
Zahlen $n > 4$ müssen nicht überprüft werden, weil dann $n - 1 > \frac{1}{2}(n + 1)$ ist.
Bemerke: Von der Zahl a ist a selber der grösste Teiler und für den zweitgrössten Teiler b gilt: $b \leq \frac{a}{2}$.
Die beiden einzigen Zahlen sind somit $n = 2$ und $n = 3$.

(c) Die Primfaktorzerlegung von $3n$ muss den Faktor 4 $(= 2 \cdot 2)$ enthalten. Das ist nur der Fall, wenn n selber den Faktor 4 enthält. Es kommen somit alle Zahlen $n \in \mathrm{V}_4$ in Frage.

10. Ist n ungerade, so sind $n - 1$ und $n + 1$ gerade und eine dieser beiden Zahlen ist durch 4 teilbar, während die andere nur durch 2 teilbar ist.

    $n - 1$, n und $n + 1$ sind drei aufeinander folgende Zahlen. Genau eine davon muss folglich durch 3 teilbar sein.

    In $a = (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)$ werden also drei Zahlen miteinander multipliziert, von denen eine durch 2, eine andere durch 4, und irgendeine der drei Zahlen durch 3 teilbar ist. Daraus folgt, dass das Produkt die Faktoren $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ enthält und somit durch 24 teilbar ist.