Algebra – Lösungen zu Übungsserie 3

1. (a) $2^7 \cdot 2^5 = 2^{12}$
   (b) $27 \cdot 3^2 = 3^3 \cdot 3^2 = 3^5$
   (c) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 30^3 = \left(\frac{30}{2}\right)^3 = 15^3$
   (d) $3^{-4} \cdot 5^4 = \frac{5^4}{3^4} = \left(\frac{5}{3}\right)^4$
   (e) $81 : 3^2 = 3^4 : 3^2 = 3^2$
   (f) $3^{-10} \cdot 9^4 = 3^{-10} \cdot \left(3^2\right)^4 = 3^{-10} \cdot 3^8 = 3^{-2}$
   (g) $12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 = 13^2$
   (h) $100^6 : 4^6 = \left(\frac{100}{4}\right)^6 = 25^6 = \left(5^2\right)^6 = 5^{12}$
   (i) $5 \cdot 2000 = 10\,000 = 10^4$
   (j) $15^2 + 20^2 = 3^2 \cdot 5^2 + 4^2 \cdot 5^2 = 5^2\left(3^2 + 4^2\right) = 5^2 \cdot 25 = 5^4$
   (k) $4^4 \cdot 64 = \left(2^2\right)^4 \cdot 2^6 = 2^8 \cdot 2^6 = 2^{14}$
   (l) $60^2 + 80^2 = 20^2 \cdot 3^2 + 20^2 \cdot 4^2 = 20^2(3^2 + 4^2) = 20^2 \cdot 5^2 = 100^2 = 10^4$
   (m) $27^3 \cdot 9^{-4} = \left(3^3\right)^3 \cdot \left(3^2\right)^{-4} = 3^9 \cdot 3^{-8} = 3^{(1)}$
   (n) $\left(25^{13}\right)^2 = 25^{26} = \left(5^2\right)^{26} = 5^{52}$
   (o) $25^{13^2} = \left(5^2\right)^{169} = 5^{338}$
   (p) $\left(8^{-3}\right)^{-2} = 8^6 = \left(2^3\right)^6 = 2^{18}$

2. (a) $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$
   (b) $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$,
   (c) $13\,013 = 13 \cdot 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13^2$
   (d) $625 = 5^4$
   (e) $626 = 2 \cdot 313$ (313 ist prim, Check notwendig bis 17)
   (f) $1\,\mathrm{Mia.} = 10^9 = 2^9 \cdot 5^9$

3. (a) $414 = 2 \cdot 3^2 \cdot 23$ und $1110 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 37 \Rightarrow 414 \sqcap 1110 = 2 \cdot 3 = 6$
   (b) $28 = 2^2 \cdot 7$ und $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \Rightarrow 28 \sqcup 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$
   (c) $840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ und $4800 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5^2 \Rightarrow 840 \sqcap 4800 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$
   (d) $111 = 3 \cdot 37$ und $185 = 5 \cdot 37 \Rightarrow 111 \sqcup 185 = 3 \cdot 5 \cdot 37 = 555$
   (e) $2^4 \sqcap 2^{11} = 2^4 = 16$
   (f) $3^3 \sqcup 3^5 = 3^5 = 243$
   (g) $48n^3m = 2^4 \cdot 3 \cdot n^3 \cdot m$ und $18n^2m^4 = 2 \cdot 3^2 \cdot n^2 \cdot m^4$
   $\Rightarrow 48n^3m \sqcup 18n^2m^4 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot n^3 \cdot m^4 = 144n^3m^4$
   (h) $48n^3m \sqcap 18n^2m^4 = 2 \cdot 3 \cdot n^2 \cdot m = 6n^2m$

4. $n = 0$: $2^{2^0} = 2^1 + 1 = 3$ ist prim
   $n = 1$: $2^{2^1} = 2^2 + 1 = 5$ ist prim
   $n = 2$: $2^{2^2} = 2^4 + 1 = 17$ ist prim
   $n = 3$: $2^{2^3} = 2^8 + 1 = 257$ ist prim (man muss bis zur Primzahl 13 testen)

5. (a) $(5 - 3)^4 = 2^4 = 16$
   (b) $5^4 - 3^4 = 625 - 81 = 544$

(c) $\left(2^5\right)^2 = 2^{10} = 1024$
(d) $(4^{11})^0 = 1$
(e) $30^4 : 6^4 = \left(\frac{30}{6}\right)^4 = 5^4 = 625$
(f) $49^8 \cdot 7^{-15} = \left(7^2\right)^8 \cdot 7^{-15} = 7^{16} \cdot 7^{-15} = 7$
(g) $\frac{10^{-6}}{10^2 \cdot 10^{-7}} = 10^{-6} \cdot 10^{-2} \cdot 10^7 = 10^{-1} = \frac{1}{10}$
(h) $15^{-4} \cdot 90^3 = \frac{90^3}{15^4} = \frac{6^3 \cdot 15^3}{15^4} = \frac{6^3}{15} = \frac{2^3 \cdot 3^3}{3 \cdot 5} = \frac{2^3 \cdot 3^2}{5} = \frac{72}{5}$
(i) $2^{3^2} - 2^{2^3} = 2^9 - 2^8 = 2^8(2-1) = 2^8 = 256$
(j) $6^3 + 4^3 = 2^3(3^3 + 2^3) = 8(27+8) = 8 \cdot 35 = 280$

6. (a) $(2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^2) \sqcap (2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
   (b) $(2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^2) \sqcup (2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7) = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2$

7. Die Endziffer von $24\,236\,764\,280$ ist eine 0 und somit ist die Zahl auch mindestens einmal durch 5 teilbar.

8. Richtig oder falsch? Beantworte die Frage ohne die beiden Seiten ganz auszurechnen!
   (a) $8^4 = \left(2^3\right)^4 = 2^{12}$ und $4^6 = \left(2^2\right)^6 = 2^{12} \Rightarrow$ beides ergibt $2^{12} \Rightarrow$ richtig
   (b) $4^9 = \left(2^2\right)^9 = 2^{18}$ und $8^6 = \left(2^3\right)^6 = 2^{18} \Rightarrow$ beides ergibt $2^{18} \Rightarrow$ richtig
   (c) $5^4 + 10^4 = 5^4\left(1^4 + 2^4\right) = 5^4 \cdot 17$, aber $15^4 = 5^4 \cdot 3^4 \neq 5^4 \cdot 17 \Rightarrow$ falsch
   (d) $7^{2^2} = 7^4$ und $7^{2 \cdot 2} = 7^4 \Rightarrow$ beides ergibt $7^4 \Rightarrow$ richtig

9. (a) $440 + 24 = 2^3(55+3) = 2^3 \cdot 58 = 2^4 \cdot 29$
   (b) $810 - 216 = 2 \cdot 3^3(15-4) = 2 \cdot 3^3 \cdot 11$
   (c) $1001 - 308 = 7 \cdot 11(13-4) = 7 \cdot 11 \cdot 9 = 3^2 \cdot 7 \cdot 11$
   (d) $2940 + 2520 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7(7+6) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$

10. Alle Primfaktoren kommen in einer geraden Potenz vor. D.h., die Exponenten aller Primfaktoren sind gerade.

11. (a) $4^n = 4096 = 4 \cdot 1024 = 4 \cdot 4^5 = 4^6 \Rightarrow n = 6$
    (b) $n^2 = n \Rightarrow n = 0$ oder $n = 1$
    (c) $n^2 = 81 = 9^2 \Rightarrow n = \pm 9$
    (d) $n^0 = 0$ geht nicht $\Rightarrow$ keine Lösung!
    (e) $3^n = \frac{1}{243} = \frac{1}{3^5} = 3^{-5} \Rightarrow n = -5$
    (f) $n^2 = 256 = 16^2 \Rightarrow n = \pm 16$
    (g) $n^7 = 1 \Rightarrow n = 1$
    (h) $n^3 = 64 = 4^3 \Rightarrow n = 4$
    (i) $11^n = 1 \Rightarrow n = 0$
    (j) $n^2 = 1024 = 2^{10} = \left(2^5\right)^2 = 32^2 \Rightarrow n = \pm 32$
    (k) $n^4 = 1024 = 2^{10} = \left(2^5\right)^2 \Rightarrow$ dann müsste $n^2 = 2^5 = 32$, aber $\sqrt{32} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$ keine Lösung!
    (l) $n^5 = 1024 = 4^5 \Rightarrow n = 4$
    (m) $2^n = 512 = 2^9 \Rightarrow n = 9$
    (n) $10^n = 1\,\mathrm{Mio.} = 1\,000\,000 = 10^6 \Rightarrow n = 6$
    (o) $\left(2^4\right)^n = 2^{20} = \left(2^4\right)^5 \Rightarrow n = 5$
    (p) $3^n \cdot 3^{24} = 3^{13} = 3^{24-11} = 3^{-11} \cdot 3^{24} \Rightarrow n = -11$