Algebra – Lösungen zu Übungsserie V

Teil A: Ausmultiplizieren und Zusammenfassen

1. (a) $42 + (11x - 100) = 42 + 11x - 100 = 11x - 58$
   (b) $2 - 5x - (3 - x - 5) = 2 - 5x - 3 + x + 5 = -4x + 4$
   (c) $8x + \big(2 - 5(x + 1) - 3x\big) \cdot 2 = 8x + 4 - 10(x + 1) - 6x = 2x + 4 - 10x - 10 = -8x - 6$
   (d) $3 - 17(2x - 2) - \big(2(3x + 1) - 5(8x - 3)\big) = 3 - 34x + 34 - (6x + 2 - 40x + 15) = 37 - 34x - 6x - 2 + 40x - 15 = 20$
   (e) $a(a + b - 2c) - 2a(a - b - c) = a^2 + ab - 2ac - 2a^2 + 2ab + 2ac = -a^2 + 3ab$
   (f) $z(z + 4) - z(z - 3) + z(z - 2) - z(z + 1) = z^2 + 4z - z^2 + 3z + z^2 - 2z - z^2 - z = 4z$
   (g) $5 - (4 - (3 - (2 - (1 + k)))) = 5 - 4 + 3 - 2 + 1 + k = 3 + k$
   (h) $\big(5(3x + 9y) + (5y - 2x) \cdot 2\big) : 11 = (15x + 45y + 10y - 4x) : 11 = (11x + 55y) : 11 = x + 5y$

2. (a) $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$
   (b) $(3y - 8)^2 = 9y^2 - 48y + 64$
   (c) $(8c + 5d)^2 = 64c^2 + 80cd + 25d^2$
   (d) $(a + 2b)(a - 2b) = a^2 - 4b^2$
   (e) $(a + 2b)(-a + 2b) = 4b^2 - a^2$
   (f) $(a + 2b)(-a - 2b) = -(a + 2b)^2 = -a^2 - 4ab - 4b^2$
   (g) $(19q^2 + \frac{1}{2})^2 = 361q^4 + 19q^2 + \frac{1}{4}$
   (h) $(\frac{7}{2}\,z - 2)(\frac{7}{2}\,z + 2) = \frac{49}{4}\,z^2 - 4$
   (i) $(x + \frac{1}{2})^2 - (x - \frac{1}{2})^2 = x^2 + x + \frac{1}{4} - (x^2 - x + \frac{1}{4}) = x^2 + x + \frac{1}{4} - x^2 + x - \frac{1}{4} = 2x$
   (j) $(13m - 12n)^2 = 169m^2 - 312mn + 144n^2$
   (k) $(e^2 - 2f)^2 = e^4 - 4e^2f + 4f^2$
   (l) $\big((3a + b)(3a - b)\big)^2 = (9a^2 - b^2)^2 = 81a^4 - 18a^2b^2 + b^4$

3. (a) $43^2 = (40 + 3)^2 = 40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 3 + 3^2 = 1600 + 240 + 9 = 1849$
   (b) $27 \cdot 33 = (30 - 3)(30 + 3) = 30^2 - 3^2 = 900 - 9 = 891$
   (c) $48^2 = (50 - 2)^2 = 50^2 - 2 \cdot 50 \cdot 2 + 2^2 = 2500 - 200 + 4 = 2304$
   (d) $64 \cdot 76 = (70 - 6)(70 + 6) = 70^2 - 6^2 = 4900 - 36 = 4864$
   (e) $997 \cdot 1003 = (1000 - 3)(1000 + 3) = 1000^2 - 3^2 = 1\,000\,000 - 9 = 999\,991$
   (f) $23 \cdot 27 = (25 - 2)(25 + 2) = 25^2 - 2^2 = 625 - 4 = 621$

4. (a) $(y + 2)(y + 11) = y^2 + 13y + 22$
   (b) $(-11a + 17)(-10b - 17) = 110ab + 187a - 170b - 289$
   (c) $(x^2 + 4x)(10x^2 + 9x + 8) = 10x^4 + 9x^3 + 8x^2 + 40x^3 + 36x^2 + 32x = 10x^4 + 49x^3 + 44x^2 + 32x$
   (d) $(c + 1)^2 + (c - 1)^2 = c^2 + 2c + 1 + c^2 - 2c + 1 = 2c^2 + 2$
   (e) $(2f - 3)(2 + 3f) - (2f + 3)(3f - 2) = 4f + 6f^2 - 6 - 9f - 6f^2 + 4f - 9f + 6 = -10f$
   (f) $(a + 1)^3 = (a + 1)(a^2 + 2a + 1) = a^3 + 2a^2 + a + a^2 + 2a + 1 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$
   Wir werden später lernen, wie sich Binompotenzen $(a + b)^n$ oder $(a - b)^n$ noch viel effizienter ausmultiplizieren lassen (Stichwort: Pascal'sches Dreieck).

(g) $(3f-g)(9f^2+g^2+3fg) = 27f^3+3fg^2+9f^2g-9f^2g-g^3-3fg^2 = 27f^3-g^3$
Für diesen Fall einer Summe oder Differenz zweier Kuben lassen sich ganz allgemein zwei Formeln notieren:

$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) \qquad \text{und} \qquad a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

Damit werden wir aber erst später arbeiten.

(h) $(a-c)(b-a)(c-b) = (a-c)(bc-b^2-ac+ab) = abc-ab^2-a^2c+a^2b-bc^2+b^2c+ac^2-abc$

(i) $(4a+b+7c)(3a-b-5c) = 12a^2-4ab-20ac+3ab-b^2-5bc+21ac-7bc-35c^2$
$= 12a^2-b^2-35c^2-ab+ac-12bc$

(j) $(a+b+c)(a+b-c) = (a+b)^2-c^2 = a^2+2ab+b^2-c^2$
Wenn wir erkennen, dass $(a+b)$ in beiden Klammern vorhanden ist und dann c einmal addiert und einmal subtrahiert wird, lässt sich die Ausmultiplikation dieses Produktes direkt als Anwendung der 3. binomischen Formel ansehen.

(k) $(x+1)^2(x-1)^2 = \big((x+1)(x-1)\big)^2 = (x^2-1)^2 = x^4-2x^2+1$
Wir könnten die beiden Klammern schon binomisch ausmultiplizieren, aber das wäre ungeschickt, denn danach müssten wir sie multiplizieren. Mit je drei Gliedern würde diese Ausmultiplikation viel zu tun geben. Viel geschickter ist es zu erkennen, dass mit der Potenzregel $a^nb^n = (ab)^n$ gearbeitet werden kann, wie das oben gezeigt wird.

(l) $(a+4b)(a-4b)-(a-5b)^2 = a^2-16b^2-(a^2-10ab+25b^2) = 10ab-41b^2$

(m) $\big((a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2\big)^3 = (a^4+2a^2b^2+b^4-a^4+2a^2b^2-b^4)^3 = (4a^2b^2)^3 = 64a^6b^6$
Zwischenzeitliches Zusammenfassen kann sich sehr lohnen!

(n) $(x+y)^2+(x-y)^2-2(x+y)(x-y) = x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2-2x^2+2y^2 = 4y^2$
Wer in der Aufgabenstellung die ausmultiplizierte Form der 2. binomischen Formel erkennt, kann die Aufgabe eleganter lösen:

$$(x+y)^2+(x-y)^2-2(x+y)(x-y) = \big((x+y)-(x-y)\big)^2 = (2y)^2 = 4y^2$$

Teil B: Wege der Faktorisierung

5. (a) $-q-2 = -(q+2)$
   (b) $12-mx = -(mx-12)$
   (c) $-x^3+x^2+x-1 = -(x^3-x^2-x+1)$
6. (a) $12x^3-18x^2-60x = 6x(2x^2-3x-10)$
   (b) $12x^3-24x+48 = 12(x^3-2x+4)$
   (c) $42m^3n^2-70m^2n^3-112m^3n^3 = 14m^2n^2(3m-5n-8mn)$
7. (a) $\frac{1}{6}\,a+\frac{3}{2}\,b = \frac{1}{6}\,(a+9b)$
   (b) $\frac{1}{2}\,q^2-q+\frac{2}{5} = \frac{1}{6}\big(3q^2-6q+\frac{12}{5}\big)$
   (c) $4m+5n-\frac{5}{3} = \frac{1}{6}\,(24m+30n-10)$
8. (a) $\frac{3}{4}\,x^2-\frac{9}{2}\,x+5 = \frac{1}{4}\,(3x^2-18x+20) = \frac{3}{4}\big(x^2-6x-\frac{20}{3}\big)$
   (b) $\frac{6}{35}\,m^2+\frac{9}{14} = \frac{3}{70}\,(4m^2+15) = \frac{6}{35}\big(m^2+\frac{15}{4}\big)$
   (c) $\frac{9}{91}\,c^2+\frac{14}{143} = \frac{1}{1001}\,(99c^2+98) = \frac{9}{91}\big(c^2+\frac{98}{99}\big)$
9. (a) $q^2-4q+4 = (q-2)^2$
   (b) $r^2+26c+169 = (r+13)^2$
   (c) $4s^2+28st+49t^2 = (2s+7t)^2$
   (d) $49p^2-144q^2 = (7p+12q)(7p-12q)$

   Die zwei Quadrate weisen jeweils darauf hin, dass eine Faktorisierung mittels binomischer Formeln funktionieren könnte.

10. (a) $x^2 - 6x - 7 = (x+1)(x-7)$
    (b) $u^2 - 11u + 24 = (u-3)(u-8)$
    (c) $k^2 + 2k - 24 = (k+6)(k-4)$
    (d) $y^2 + 20y + 64 = (y+16)(y+4)$
    (e) $f^2 + f - 210 = (f+15)(f-14)$
    (f) $5n^2 - 2n - 3 = (5n+3)(n-1)$
    (g) $12x^2 - 8x + 1 = (6x-1)(2x-1)$
    (h) $3a^2 + 16a + 5 = (3a+1)(a+5)$

11. (a) $5uv^2 + 40uv + 80u = 5u(v^2 + 8v + 16) = 5u(v+4)^2$
    (b) $3x^2 - 39x - 342 = 3(x^2 - 13x - 114) = 3(x+6)(x-19)$
    (c) $12ab^2 - 3a = 3a(4b^2 - 1) = 3a(2b+1)(2b-1)$
    (d) $\frac{2}{3}y^2 - y - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}(2y^2 - 3y - 5) = \frac{1}{3}(2y-5)(y+1)$
    (e) $x^2 + 5x + \frac{25}{4} = \frac{1}{4}(4x^2 + 20x + 25) = \frac{1}{4}(2x+5)^2$
    (f) $\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(t^4 - 2t^2 + 1) = \frac{1}{4}(t^2-1)^2 = \big((t+1)(t-1)\big)^2 = (t+1)^2(t-1)^2$
    Manchmal kann man hintereinander mehrmals faktorisieren!
    (g) $32c^2 + 72w^2 = 8(4c^2 + 9w^2)$ (da lässt sich effektiv nichts weiter machen)
    (h) $32c^2 - 72w^2 = 8(4c^2 - 9w^2) = 8(2c+3w)(2c-3w)$
    (i) $50p^2 + 320pq + 512q^2 = 2(25p^2 + 160pq + 256q^2) = 2(5p+16q)^2$
    (j) $2m^2 + mn - 91n^2 = (2m-13n)(m+7n)$
    (k) $\frac{7}{30}g^2 + \frac{7}{6}g - \frac{28}{5} = \frac{7}{30}(g^2 + 5g - 24) = \frac{7}{30}(g+8)(g-3)$
    (l) $x^2 + x + 1$ lässt sich tatsächlich nicht weiter faktorisieren!
    (m) $au + av + bu + bv = a(u+v) + b(u+v) = (a+b)(u+v)$
    (n) $16x^2y^2 + 24xy^3 + 9y^4 = y^2(16x^2 + 24xy + 9y^2) = y^2(4x+3y)^2$
    (o) $24pz - 39p - 16qz + 26q = 3p(8z-13) - 2q(8z-13) = (3p-2q)(8z-13)$
    (p) $81v^4 - 256w^8 = (9v^2 + 16w^4)(9v^2 - 16w^4) = (9v^2 + 16w^4)(3v + 4w^2)(3v - 4w^2)$
    (q) $(2a-3b)^2 - (3b-2a) = (2a-3b)^2 + 2a - 3b = (2a-3b)(2a-3b+1)$
    Das Ausklammern von (-1) zu Beginn hilft zu erkennen, dass anschliessend $2a-3b$ ausgeklammert werden kann.
    (r) $-2ar + as - 4br + 2bs = a(-2r+s) + 2b(-2r+s) = (a+2b)(s-2r)$
    (s) $\frac{3}{10}x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{54}{5} = \frac{3}{10}(x^2 - 15x + 36) = \frac{3}{10}(x-3)(x-12)$
    (t) $\frac{1}{18}a^3b - \frac{1}{3}a^2b + \frac{1}{2}ab = \frac{ab}{18}(a^2 - 6a + 9) = \frac{ab}{18}(a-3)^2$
    (u) $60x^2 + 16x - 12 = 4(15x^2 + 4x - 3) = 4(5x+3)(3x-1)$