Algebra – Lösungen zu Übungsserie 6

1. (a) $20 + 2(3x - 5) = 63 - 5(2x + 1) \quad \Leftrightarrow \quad 20 + 6x - 10 = 63 - 10x - 5$
   $\Leftrightarrow \quad 16x = 48 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 3}}$
   (b) $3x - 2 - 5x = -2x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2x - 2 = -2x - 2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \mathbb{Q}}}$
   (c) $74(3x + 5) = 37(2x + 2) \quad \Leftrightarrow \quad 2(3x + 5) = 2x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 5 = x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = -2}}$
   (d) $3 - 17(2x - 2) = 2(3x + 1) - 5(8x - 3) \quad \Leftrightarrow \quad 3 - 34x + 34 = 6x + 2 - 40x + 15$
   $\Leftrightarrow \quad 0x = -20 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{\,\}}}$
   (e) $2(6x + 2 - 4x) = 0 - 4(6 - 2x) \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 2 = -2(6 - 2x)$
   $\Leftrightarrow \quad x + 1 = 2x - 6 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 7}}$
   (f) $3x - 17(2 - 2x) = 2(3 + x) - 5(8 - 3x) \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 34 + 34x = 6 + 2x - 40 + 15x \quad \Leftrightarrow$
   $20x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 0}}$

2. (a) $-(2x - 6) + (2x + 6) = -2x + 6 + 2x + 6 = \underline{\underline{12}}$
   (b) $16x - (16 + 17x) + x = 16x - 16 - 17x + x = \underline{\underline{-16}}$
   (c) $-(8x - 1 + 5x) + (2 - x) = -8x + 1 - 5x + 2 - x = \underline{\underline{-14x + 3}}$
   (d) $8x + \big(2 - 5(x + 1) - 3x\big) \cdot 2 = 8x + 2(2 - 5x - 5 - 3x) = 8x + 4 - 10x - 10 - 6x = \underline{\underline{-8x - 6}}$
   (e) $(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1 = \underline{\underline{4x}}$
   (f) $(2 + 3x)(2x - 3) - (2x + 3)(3x - 2) = 6x^2 - 5x - 6 - 6x^2 - 5x + 6 = \underline{\underline{10x}}$
   (g) $(2x - x^2 + x - 3) \cdot 5 - (3x + 4 \cdot 3x - 5x^2) = 10x - 5x^2 + 5x - 15 - 3x - 12x + 5x^2 = \underline{\underline{-15}}$
   (h) $(x + y)^2 + (x - y)^2 + (x + y)(x - y) = x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - y^2 = \underline{\underline{3x^2 + y^2}}$

3. (a) $(x - 2)(x + 5) = (x - 3)(x + 8) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 3x - 10 = x^2 + 5x - 24$
   $\Leftrightarrow \quad 2x = 14 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 7}}$
   (b) $(12x - 9)(x + 1) = (3x + 3)(4x - 3) \quad \Leftrightarrow \quad 12x^2 + 3x - 9 = 12x^2 + 3x - 9$
   $\Leftrightarrow \quad 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \mathbb{Q}}}$
   (c) $(x + 2)^2 = (x - 2)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 4x + 4 = x^2 - 4x + 4 \quad \Leftrightarrow \quad 8x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 0}}$
   (d) $(4x - 3)(9x + 1) = 3x(12x + 1) \quad \Leftrightarrow \quad 36x^2 - 23x - 3 = 36x^2 + 3x$
   $\Leftrightarrow \quad 26x = -3 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = -\tfrac{3}{26}}}$
   (e) $(3x - 2)(5x + 5) = (3x - 1)(5x + 2) \quad \Leftrightarrow \quad 15x^2 + 5x - 10 = 15x^2 + x - 2$
   $\Leftrightarrow \quad 4x = 8 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 2}}$
   (f) $(2x + 5)(3x - 1) = (x + 2)(6x + 1) \quad \Leftrightarrow \quad 6x^2 + 13x - 5 = 6x^2 + 13x + 2$
   $\Leftrightarrow \quad -5 = 2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{\,\}}}$
   (g) $(2x + 6)(x + 26) = (x + 5)(2x + 76) \quad \Leftrightarrow \quad (x + 3)(x + 26) = (x + 5)(x + 38)$
   $\Leftrightarrow \quad x^2 + 29x + 78 = x^2 + 43x + 190 \quad \Leftrightarrow \quad 14x = -112 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = -8}}$
   (h) $(3x - 14)(4x + 1) = (3x - 16)(4x + 26) \quad \Leftrightarrow \quad 12x^2 - 53x - 14 = 12x^2 + 14x - 416$
   $\Leftrightarrow \quad 67x = 402 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 6}}$

4. (a) $7 - 4(6 - x) = 7 - 24 + 4x$ ist im Allgemeinen (i.A.) nicht gleich $7 - 24 - 4x \Rightarrow \underline{\underline{\text{falsch}}}$
   (b) $(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$ ist i.A. nicht gleich $x + 16 \Rightarrow \underline{\underline{\text{falsch}}}$
   (c) $x^2 + x = x(x + 1)$ ist i.A. nicht gleich $3x \Rightarrow \underline{\underline{\text{falsch}}}$
   (d) $x^2 + x = x(x + 1)$ stimmt für alle $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \underline{\underline{\text{richtig}}}$
   (e) $-3x + (4 + 3x) = -3x + 4 + 3x = 4$ stimmt für alle $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \underline{\underline{\text{richtig}}}$
   (f) $3(6 - x) = 18 - 3x$ ist im Allgemeinen nicht gleich $18 - x \Rightarrow \underline{\underline{\text{falsch}}}$

5. (a) **Merke: Ist ein Produkt aus zwei oder mehr Faktoren gleich 0, so muss mindestens einer der Faktoren selber gleich 0 sein.**

$$a \cdot b = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad a = 0 \quad \text{oder} \quad b = 0$$

   Das hier notierte "oder" ist ein sogenanntes **logisches Oder**. Es bedeutet ganz genau, dass mindestens einer der beiden Faktoren a und b gleich 0 ist. Es dürfen aber auch beide gleich 0 sein. Es handelt sich als nicht um ein "entweder ... oder ...".
   Für $(x - 3)(x + 2)(x + 4) = 0$ gibt es folglich drei mögliche Fälle:
   Fall 1: $x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x = 3}$
   Fall 2: $x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x = -2}$
   Fall 3: $x + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x = -4}$
   Zusammen ergibt sich als Lösungsmenge: $\underline{\underline{\mathbb{L} = \{3, -2, -4\}}}$.

   (b) Bei Gleichungen mit Beträgen können wir jeweils zwei Fälle unterscheiden. Bei $|3x + 2| = 1$ lauten sie:
   Fall 1: $3x + 2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x = -\frac{1}{3}}$
   Fall 2: $3x + 2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = -3 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x = -1}$
   Hier lautet die komplette Lösungsmenge folglich: $\underline{\underline{\mathbb{L} = \big\{ -1, -\frac{1}{3}\big\}}}$.

   (c) Das Quadrat einer rationalen Zahl ist niemals kleiner als 0. Es gibt folglich nur noch die Möglichkeit, dass $(x - 4)^2 = 0$ ist. Das ist aber nur für $\underline{\underline{x = 4}}$ der Fall.

   (d) Wieder gilt die Aussage unter (a) und wir unterscheiden zwei Fälle:
   Fall 1: $2x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$
   Fall 2: $3x + 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = -12 \quad \Leftrightarrow \quad x = -4$
   Die vollständige Lösungsmenge lautet daher: $\underline{\underline{\mathbb{L} = \{2, -4\}}}$.