Algebra – Lösungen zu Übungsserie 8

Der "Umkehrtrick": In vielen dieser Aufgaben hilft es, einen Ausdruck der Form $a-b$ zu $b-a$ umzukehren. Dazu muss ein Faktor -1 ausgeklammert werden: $a-b=-(b-a)$. Bei Brüchen können wir diesen Faktor -1 unterbringen, wo es gerade praktisch ist – im Nenner, im Zähler oder vor dem Bruch als Ganzes. Beispiel:

$$\frac{2}{b-a}-\frac{1}{a-b}=\frac{2}{b-a}-\frac{1}{-(b-a)}=\frac{2}{b-a}+\frac{1}{b-a}=\frac{3}{b-a}$$

1. $$\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a^2-1}=\frac{1}{a-1}-\frac{1}{(a+1)(a-1)}=\frac{a+1-1}{(a+1)(a-1)}=\underline{\underline{\frac{a}{(a+1)(a-1)}}}$$

2. $$\frac{a}{a-c}-\frac{c}{a+c}-\frac{2ac}{a^2-c^2}=\frac{a}{a-c}-\frac{c}{a+c}-\frac{2ac}{(a+c)(a-c)}=\frac{a^2+ac-ac+c^2-2ac}{(a+c)(a-c)}$$
$$=\frac{a^2-2ac+c^2}{(a+c)(a-c)}=\frac{(a-c)^2}{(a+c)(a-c)}=\underline{\underline{\frac{a-c}{a+c}}}$$

3. $$\frac{4}{x-1}+\frac{3}{1-x}=\frac{4}{x-1}-\frac{3}{x-1}=\underline{\underline{\frac{1}{x-1}}}$$

4. $$\frac{a}{ac-c^2}+\frac{e}{ce-ae}=\frac{a}{c(a-c)}+\frac{e}{e(c-a)}=\frac{a}{c(a-c)}-\frac{1}{a-c}=\frac{a-c}{c(a-c)}=\underline{\underline{\frac{1}{c}}}$$

5. $$\frac{4a^2}{a^2-2ac+c^2}+\frac{4a}{c-a}=\frac{4a^2}{(a-c)^2}-\frac{4a}{a-c}=\frac{4a^2-4a^2+4ac}{(a-c)^2}=\underline{\underline{\frac{4ac}{(a-c)^2}}}$$

6. $$\frac{a-b}{c-d}+\frac{a+b}{d-c}=\frac{a-b}{c-d}-\frac{a+b}{c-d}=\frac{a-b-a-b}{c-d}=\underline{\underline{-\frac{2b}{c-d}}}=\underline{\underline{\frac{2b}{d-c}}}$$

7. $$\frac{(a+b)^2}{ap+aq-bp-bq}-\frac{a-b}{p+q}=\frac{(a+b)^2}{(a-b)(p+q)}-\frac{a-b}{p+q}=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)(p+q)}=\underline{\underline{\frac{4ab}{(a-b)(p+q)}}}$$

8. $$\frac{4}{c-5}-\frac{3}{c+3}-\frac{c+26}{c^2-2c-15}=\frac{4}{c-5}-\frac{3}{c+3}-\frac{c+26}{(c+3)(c-5)}$$
$$=\frac{4c+12-3c+15-c-26}{(c+3)(c-5)}=\underline{\underline{\frac{1}{(c+3)(c-5)}}}$$

9. $$\frac{b-c}{a^2+ac}-\frac{a-b}{c^2+ac}+\frac{a^2+c^2}{a^2c+ac^2}=\frac{b-c}{a(a+c)}-\frac{a-b}{c(a+c)}+\frac{a^2+c^2}{ac(a+c)}$$
$$=\frac{bc-c^2-a^2+ab+a^2+c^2}{ac(a+c)}=\frac{bc+ab}{ac(a+c)}=\frac{b(a+c)}{ac(a+c)}=\underline{\underline{\frac{b}{ac}}}$$

10. $$\frac{a}{cx-c}-\frac{c}{a-ax}=\frac{a}{c(x-1)}-\frac{c}{a(1-x)}=\frac{a}{c(x-1)}+\frac{c}{a(x-1)}=\underline{\underline{\frac{a^2+c^2}{ac(x-1)}}}$$

11. $$\frac{7}{a^2-a}-\frac{1}{1-a}=\frac{7}{a(a-1)}+\frac{1}{a-1}=\underline{\underline{\frac{7+a}{a(a-1)}}}$$

12. $$\frac{2c+3d}{2c+d}-2-\frac{d-4c}{d}=\frac{d(2c+3d)-2d(2c+d)-(d-4c)(2c+d)}{d(2c+d)}$$
$$=\frac{2cd+3d^2-4cd-2d^2-2cd-d^2+8c^2+4cd}{d(2c+d)}=\underline{\underline{\frac{8c^2}{d(2c+d)}}}$$

13. Als Resultat ergibt sich stets $\frac{1}{1-a}$:

$$\text{(a)}\quad 1+\frac{a}{1-a}=\frac{1-a+a}{1-a}=\underline{\underline{\frac{1}{1-a}}}$$

$$\text{(b)}\quad 1+a+\frac{a^2}{1-a}=\frac{(1+a)(1-a)+a^2}{1-a}=\frac{1-a^2+a^2}{1-a}=\underline{\underline{\frac{1}{1-a}}}$$

$$\text{(c)}\quad 1+a+a^2+\frac{a^3}{1-a}=\frac{(1+a+a^2)(1-a)+a^3}{1-a}=\frac{1-a^3+a^3}{1-a}=\underline{\underline{\frac{1}{1-a}}}$$

Somit würde die Aufgabe (i) und ihre Lösung lauten:

$$\text{(i)}\quad 1+a+a^2+\ldots+a^8+\frac{a^9}{1-a}=\frac{(1+a+\ldots+a^8)(1-a)+a^9}{1-a}=\frac{1-a^9+a^9}{1-a}=\underline{\underline{\frac{1}{1-a}}}$$

Die tiefere Begründung dieser Resultate liegt darin, dass sich aus x^n-y^n stets $(x-y)$ ausklammern lässt:

$$x^n-y^n=(x-y)\big(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\ldots+x^2y^{n-3}+xy^{n-2}+y^{n-1}\big)$$

Für $x=1$ und $y=a$ ergibt sich so:

$$1-a^n=(a-1)\big(1+a+a^2+\ldots+a^{n-3}+a^{n-2}+a^{n-1}\big)$$

In Aufgabe 13 wird jeweils der Term vor dem Bruch, also $1+a+a^2+\ldots+a^{n-3}+a^{n-2}+a^{n-1}$, beim Erweitern mit dem Nenner $(1-a)$ multipliziert und es entsteht $1-a^n$ im Zähler.

14. $$\frac{2q^2-4q}{3q-1}+\frac{3-q+q^2}{3q-1}-\frac{4-8q+3q^2}{3q-1}+\frac{-3q+1}{3q-1}=\frac{(2+1-3)q^2+(-4-1+8-3)q+3-4+1}{3q-1}=\underline{\underline{0}}$$

15. $$\frac{1}{a^2}-\frac{2}{ab}+\frac{1}{b^2}=\frac{b^2-2ab+a^2}{a^2b^2}=\underline{\underline{\frac{(a-b)^2}{a^2b^2}}}$$

16. $$\frac{4c-2}{2c+4}-\frac{8c-7}{6c+12}-\frac{2c-5}{10c+20}=\frac{4c-2}{2(c+2)}-\frac{8c-7}{6(c+2)}-\frac{2c-5}{10(c+2)}=\frac{15(4c-2)-5(8c-7)-3(2c-5)}{30(c+2)}$$
$$=\frac{60c-30-40c+35-6c+15}{30(c+2)}=\frac{14c+20}{30(c+2)}=\underline{\underline{\frac{7c+10}{15(c+2)}}}$$

17. $$\frac{x-1}{2x+4}-\frac{x+1}{3x-6}+\frac{6x^2+x-10}{30x^2-120}=\frac{x-1}{2(x+2)}-\frac{x+1}{3(x-2)}+\frac{6x^2+x-10}{30(x+2)(x-2)}$$
$$=\frac{15(x-2)(x-1)-10(x+2)(x+1)+6x^2+x-10}{30(x+2)(x-2)}$$
$$=\frac{15x^2-45x+30-10x^2-30x-20+6x^2+x-10}{30(x+2)(x-2)}=\frac{11x^2-74x}{30(x+2)(x-2)}=\underline{\underline{\frac{x(11x-74)}{30(x+2)(x-2)}}}$$

18. $$\frac{a+c}{a^2-ac}-\frac{a-c}{ac+c^2}+\frac{a(a-3c)}{a^2c-c^3}=\frac{a+c}{a(a-c)}-\frac{a-c}{c(a+c)}+\frac{a(a-3c)}{c(a+c)(a-c)}$$
$$=\frac{c(a+c)^2-a(a-c)^2+a^2(a-3c)}{ac(a+c)(a-c)}=\frac{a^2c+2ac^2+c^3-a^3+2a^2c-ac^2+a^3-3a^2c}{ac(a+c)(a-c)}$$
$$=\frac{ac^2+c^3}{ac(a+c)(a-c)}=\frac{c^2(a+c)}{ac(a+c)(a-c)}=\underline{\underline{\frac{c}{a(a-c)}}}$$

19. $$\frac{a-7}{2a-1}-\frac{3a+2}{3a+1}=\frac{(3a+1)(a-7)-(2a-1)(3a+2)}{(2a-1)(3a+1)}$$
$$=\frac{3a^2-20a-7-6a^2-a+2}{(2a-1)(3a+1)}=\underline{\underline{\frac{-3a^2-21a-5}{(2a-1)(3a+1)}}}$$

20. $$\frac{2x+1}{4x-2}-\frac{3x^2+5x}{6x^2+7x-5}=\frac{2x+1}{2(2x-1)}-\frac{3x^2+5x}{(2x-1)(3x+5)}=\frac{(3x+5)(2x+1)-2(3x^2+5x)}{2(2x-1)(3x+5)}$$
$$=\frac{6x^2+13x+5-6x^2-10x}{2(2x-1)(3x+5)}=\frac{3x+5}{2(2x-1)(3x+5)}=\underline{\underline{\frac{1}{2(2x-1)}}}$$

21. $$\frac{6a^2}{4a^2-4a+1}-\frac{2a}{2a-1}=\frac{6a^2}{(2a-1)^2}-\frac{2a}{2a-1}=\frac{6a^2-2a(2a-1)}{(2a-1)^2}=\frac{2a^2+2a}{(2a-1)^2}=\underline{\underline{\frac{2a(a+1)}{(2a-1)^2}}}$$

22. $$\frac{2m}{2m-n}-\frac{2m-n}{2m+n}-\frac{n}{m}=\frac{2m^2(2m+n)-m(2m-n)^2-n(2m+n)(2m-n)}{m(2m+n)(2m-n)}$$
$$=\frac{4m^3+2m^2n-4m^3+4m^2n-mn^2-4m^2n+n^3}{m(2m+n)(2m-n)}$$
$$=\frac{2m^2n-mn^2+n^3}{m(2m+n)(2m-n)}=\underline{\underline{\frac{n(2m^2-mn+n^2)}{m(2m+n)(2m-n)}}}$$

23. $$\frac{a-2}{(a-4)^2}-\frac{a-2}{a^2-7a+12}=\frac{a-2}{(a-4)^2}-\frac{a-2}{(a-3)(a-4)}=\frac{(a-2)(a-3)-(a-2)(a-4)}{(a-3)(a-4)^2}$$
$$=\frac{(a-2)(a-3-a+4)}{(a-3)(a-4)^2}=\underline{\underline{\frac{a-2}{(a-3)(a-4)^2}}}$$

24. $$3-\frac{a-b}{4a-b}+\frac{-33a^2-16ab+4b^2}{12a^2+5ab-2b^2}=3-\frac{a-b}{4a-b}+\frac{-33a^2-16ab+4b^2}{(4a-b)(3a+2b)}$$
$$=\frac{3(12a^2+5ab-2b^2)-(a-b)(3a+2b)-33a^2-16ab+4b^2}{(4a-b)(3a+2b)}$$
$$=\frac{36a^2+15ab-6b^2-3a^2+ab+2b^2-33a^2-16ab+4b^2}{(4a-b)(3a+2b)}=\frac{0}{(4a-b)(3a+2b)}=\underline{\underline{0}}$$

25. $$\frac{4}{c-5}-\frac{3}{c+3}-\frac{c+26}{c^2-2c-15}=\frac{4}{c-5}-\frac{3}{c+3}-\frac{c+26}{(c+3)(c-5)}$$
$$=\frac{4c+12-3c+15-c-26}{(c+3)(c-5)}=\underline{\underline{\frac{1}{(c+3)(c-5)}}}$$

26. $$2x-1-\frac{2x^2+5x+2}{2x+1}+\frac{x^2-7x+3}{1-2x}=2x-1-\frac{2x^2+5x+2}{2x+1}-\frac{x^2-7x+3}{2x-1}$$
$$=\frac{(2x+1)(2x-1)^2-(2x-1)(2x^2+5x+2)-(2x+1)(x^2-7x+3)}{(2x+1)(2x-1)}$$
$$=\frac{8x^3-4x^2-2x+1-4x^3-8x^2+x+2-2x^3+13x^2+x-3}{(2x+1)(2x-1)}$$
$$=\frac{2x^3+x^2}{(2x+1)(2x-1)}=\frac{x^2(2x+1)}{(2x+1)(2x-1)}=\underline{\underline{\frac{x^2}{2x-1}}}$$

27. $$\frac{a^3-7a^2-12a+108}{(a-6)^2}-a-4=\frac{a^3-7a^2-12a+108-(a+4)(a-6)^2}{(a-6)^2}$$
$$=\frac{a^3-7a^2-12a+108-a^3+8a^2+12a-144}{(a-6)^2}=\frac{a^2-36}{(a-6)^2}=\frac{(a+6)(a-6)}{(a-6)^2}=\underline{\underline{\frac{a+6}{a-6}}}$$