Algebra – Lösungen zu Übungsserie 9

1. Für die Lösungen ergibt sich:

   (a) $$\frac{7}{x-8} = \frac{11}{x-1} \qquad | \cdot (x-1)(x-8) \qquad \text{mit} \quad x \neq 1 \quad \text{und} \quad x \neq 8$$

   $$\Rightarrow \quad 7x - 7 = 11x - 88 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{81}{4}}} \quad \checkmark$$

   (b) $$\frac{1}{4} - \frac{1}{2(x+5)} = \frac{3}{x+5} \qquad | \cdot 4(x+5) \qquad \text{mit} \quad x \neq -5$$

   $$\Rightarrow \quad x + 5 - 2 = 12 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 9}} \quad \checkmark$$

   (c) $$\frac{1}{x} + \frac{2x+5}{x+6} = 2 \qquad | \cdot x(x+6) \qquad \text{mit} \quad x \neq 0 \quad \text{und} \quad x \neq -6$$

   $$\Rightarrow \quad x + 6 + 2x^2 + 5x = 2x^2 + 12x \quad \Leftrightarrow \quad 6 = 6x \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 1}} \quad \checkmark$$

   (d) $$\frac{1}{x-5} + \frac{2x-3}{x+2} = 2 \qquad | \cdot (x+2)(x-5) \qquad \text{mit} \quad x \neq -2 \quad \text{und} \quad x \neq 5$$

   $$\Rightarrow \quad x + 2 + 2x^2 - 13x + 15 = 2x^2 - 6x - 20 \quad \Leftrightarrow \quad 17 - 12x = -6x - 20 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{37}{6}}} \quad \checkmark$$

   (e) $$\frac{1}{x-5} + \frac{1}{5-x} = \frac{1}{x} \qquad | \cdot x(x-5) \qquad \text{mit} \quad x \neq 0 \quad \text{und} \quad x \neq 5$$

   $$\Rightarrow \quad x - x = 5 - x \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x = 5} \quad ↯ \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{\,\}}}$$

   (f) $$\frac{4-x}{x-5} + \frac{x-2}{2x-10} = \frac{1}{2} \qquad | \cdot 2(x-5) \qquad \text{mit} \quad x \neq 5$$

   $$\Rightarrow \quad 8 - 2x + x - 2 = x - 5 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{11}{2}}} \quad \checkmark$$

2. In dieser Aufgabe geht es darum zu beurteilen, ob sich bei der jeweiligen Umformung die Lösungsmenge verändert. Die anfängliche Lösungsmenge können wir sofort aufschreiben, weil die linke Gleichungsseite fast schon vollständig faktorisiert ist ($9 + x^2$ wird für keinen Wert von x gleich 0 und kann deswegen auch nicht weiter faktorisiert werden):

   $$\frac{1}{x} \frac{9-x^2}{x^2} (9+x^2)(7x-4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(3+x)(3-x)(9+x^2)(7x-4)}{x^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L} = \left\{-3, \frac{4}{7}, 3\right\}$$

   Nun fällt es nicht so schwer zu sagen, ob $\mathbb{L}$ nach der Umformung noch identisch ist:

   (a) $\cdot x$ ist **äquivalent**, denn $x = 0$ ist weder vorher, noch nachher eine Lösung
   (b) $\cdot x^3$ ist **äquivalent**, Begründung wie bei (a)
   (c) $:(x+3)$ ist **nicht-äquivalent**, denn durch diese Division fällt die Lösung $x = -3$ weg
   (d) $:(9+x^2)$ ist **äquivalent**, denn $9 + x^2$ ist für alle x eine Zahl ≥ 9
   (e) $:\frac{4}{7}$ ist **äquivalent**, denn die Division durch eine Zahl $\neq 0$ ist stets eine Äquivalenzumformung
   (f) $-\frac{1}{x-3}$ ist **nicht-äquivalent**, denn durch diese Subtraktion wird die Lösung $x = 3$ ungültig, weil im neuen Glied $x - 3$ im Nenner steht
   (g) $\cdot(14x-8)$ ist **äquivalent**, denn durch diese Multiplikation kommt zwar eine Lösung $x = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$ hinzu, aber die gibt es ja bereits vorher
   (h) $:(49x^2-16)$ ist **nicht-äquivalent**, denn durch diese Division fällt die Lösung $x = \frac{4}{7}$ weg, denn $(49x^2 - 16 = (7x+4)(7x-4))$

3. Wir lösen ganz gleich wie schon unter 1.:

   (a) $$\frac{4x-4}{5x-2}-\frac{3x-1}{10x-4}+\frac{5x+1}{15x-6}=0 \qquad |\cdot 6(5x-2) \qquad \text{mit} \quad x\neq\frac{2}{5}$$

   $$\Rightarrow \quad 24x-24-9x+3+10x+2=0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=\frac{19}{25}}} \quad \checkmark$$

   (b) $$\frac{5}{x^2-9}=\frac{3}{x^2-6x+9} \qquad |\cdot(x+3)(x-3)^2 \qquad \text{mit} \quad x\neq\pm3$$

   $$\Rightarrow \quad 5x-15=3x+9 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=12}} \quad \checkmark$$

   (c) $$\frac{5}{x-3}+\frac{4}{x+3}=\frac{7x-1}{x^2-9} \qquad |\cdot(x+3)(x-3) \qquad \text{mit} \quad x\neq\pm3$$

   $$\Rightarrow \quad 5x+15+4x-12=7x-1 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=-2}} \quad \checkmark$$

   (d) $$\frac{14}{2x+3}-\frac{1}{x}=\frac{8x+5}{2x^2+3x} \qquad |\cdot x(2x+3) \qquad \text{mit} \quad x\neq0 \quad \text{und} \quad x\neq-\frac{3}{2}$$

   $$\Rightarrow \quad 14x-2x-3=8x+5 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=2}} \quad \checkmark$$

   (e) $$\frac{25}{8x^2-40x+50}-\frac{5x}{4x^2-25}+\frac{5}{4x-10}=0 \qquad |\cdot 2(2x+5)(2x-5)^2 \qquad \text{mit} \quad x\neq\pm\frac{5}{2}$$

   $$\Rightarrow \quad 50x+125-20x^2+50x+20x^2-50=0 \quad\Leftrightarrow\quad 100x=0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=0}} \quad \checkmark$$

   (f) $$\frac{14-2x}{x-1}+\frac{9+x}{1-x}=-1 \qquad |\cdot(x-1) \qquad \text{mit} \quad x\neq1$$

   $$\Rightarrow \quad 14-2x-9-x=1-x \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=2}} \quad \checkmark$$

   (g) $$\frac{\frac{1}{2}x-1}{x+\frac{1}{10}}\cdot\frac{10}{10}-\frac{\frac{1}{5}}{2x+\frac{1}{5}}\cdot\frac{5}{5}=1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{5x-10}{10x+1}-\frac{1}{10x+1}=1 \quad |\cdot(10x+1) \quad \text{mit} \quad x\neq-\frac{1}{10}$$

   $$\Rightarrow \quad 5x-10-1=10x+1 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=-\frac{12}{5}}} \quad \checkmark$$

   (h) $$\frac{\frac{1}{2}x+2}{1-\frac{1}{2}x}\cdot\frac{2}{2}+\frac{3}{2-x}=\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x+4}{2-x}+\frac{3}{2-x}=\frac{1}{2} \qquad |\cdot 2(2-x) \qquad \text{mit} \quad x\neq2$$

   $$\Rightarrow \quad 2x+8+6=2-x \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=-4}} \quad \checkmark$$

4. Vgl. Aufgabe 2! Die Lösungsmenge der Gleichung ist derzeit $\mathbb{L}=\{-1\}$, denn $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ (Kuben-Formel).

   (a) $:(x^2-x+1)$ ist **äquivalent**, denn x^2-x+1 hat keine Faktorisierung und wird somit für kein x gleich null
   (b) $:(x+1)$ ist **nicht-äquivalent**, denn durch diese Division fällt die Lösung $x=-1$ weg
   (c) -1 ist **äquivalent**, denn die Subtraktion einer Konstante ist immer eine Äquivalenzumformung
   (d) $:(x-1)$ ist **äquivalent**, denn der danach nicht mehr erlaubte Fall $x=1$ war vorher keine Lösung der Gleichung.

5. Es ergeben sich die folgenden Lösungen:

   (a) "Ein Produkt ist genau dann gleich null, wenn mindestens ein Faktor gleich null ist!" $\Rightarrow$ wir arbeiten mit Fallunterscheidungen!

   Fall 1: $\underline{x=0}$, kommt aber nicht in Frage, weil sonst $\frac{1}{x}$ in der zweiten Klammer nicht definiert ist
   Fall 2: $\frac{1}{x}-1=0 \quad\Rightarrow\quad \underline{x=1}$
   Fall 3: $\frac{4}{x}-x=0 \quad\Rightarrow\quad 4-x^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad (2+x)(2-x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{x=\pm 2}$
   $\Rightarrow\quad \underline{\underline{\mathbb{L}=\{-2,1,2\}}}.$

   (b) $$\frac{3x-5}{x-\frac{1}{2}}=2 \quad \left|\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\right. \quad \text{mit} \quad x\neq\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad 3x-5=2x-1 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=4}} \quad ✓$$

   (c) $$\frac{\frac{27}{5}x-21}{12}=\frac{3x}{5} \quad\overset{\cdot 60}{\Leftrightarrow}\quad 27x-105=36x \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=-\frac{35}{3}}}$$

   (d) $$\frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{3}}{4}=0.25 \quad\overset{\cdot 4}{\Leftrightarrow}\quad \frac{x}{2}+\frac{x}{3}=1 \quad\overset{\cdot 6}{\Leftrightarrow}\quad 3x+2x=6 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=\frac{6}{5}}}$$

   (e) $$\frac{4x-5}{1-\frac{1+x}{2}}=2 \quad\overset{\cdot\frac{1}{2}}{\Leftrightarrow}\quad \frac{4x-5}{2-(1+x)}=1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{4x-5}{1-x}=1 \quad |\cdot(1-x) \quad \text{mit} \quad x\neq 1$$
   $$\Rightarrow\quad 4x-5=1-x \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=\frac{6}{5}}} \quad ✓$$

   (f) $$\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} \quad |\,\text{erweitern mit } x \text{ auf beiden Seiten} \quad \text{mit} \quad x\neq 0$$
   $$\Rightarrow\quad \frac{x+1}{x-1}=\frac{x-1}{x+1} \quad |\cdot(x+1)(x-1) \quad \text{mit} \quad x\neq\pm 1$$
   $$\Rightarrow\quad (x+1)^2=(x-1)^2 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+2x+1=x^2-2x+1 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{x=0} \ ↯ \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{\mathbb{L}=\{\,\}}}$$

   (g) $$\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2+\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2=1 \quad |\cdot\left(x^2+1\right)^2 \quad \text{unproblematisch, weil} \quad x^2+1\geq 1$$
   $$\Leftrightarrow\quad \left(x^2-1\right)^2+(2x)^2=\left(x^2+1\right)^2$$
   $$\Leftrightarrow\quad x^4-2x^2+1+4x^2=x^4+2x^2+1 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{0=0} \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{\mathbb{L}=\mathbb{R}}}$$

   (h) Wie bei (a) machen wir eine Fallunterscheidung (vgl. Bemerkung bei (a)):
   Fall 1: $\frac{x+2}{2}-x=0 \quad\Leftrightarrow\quad x+2=2x \quad\Leftrightarrow\quad \underline{x=2}$
   Fall 2: $\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}=0 \quad\Rightarrow\quad x+1-2x=0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{x=1}$, wobei $x\neq 1$ und $x\neq 0$
   $\Rightarrow\quad \underline{\underline{\mathbb{L}=\{1,2\}}}.$

   (i) Hier hat sich ein Fehler in der Aufgabenstellung eingeschlichen. Sie sollte lauten: $|\frac{1}{x}-x|=0.$
   Bei Betragsgleichungen sollten wir eigentlich ebenfalls eine Fallunterscheidung machen. Das erübrigt sich nun aber, weil rechts die Zahl 0 steht. Dann muss nämlich der Inhalt der zwischen den Betragsstrichen zwingend auch gleich 0 sein:

   $$\frac{1}{x}-x=0 \quad\overset{x\neq 0}{\Rightarrow}\quad 1-x^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad (1+x)(1-x)=0 \quad ✓ \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{\mathbb{L}=\{-1,1\}}}$$

   (j) **Fall 1:** $\frac{1}{x}+x=1 \quad\overset{x\neq 0}{\Rightarrow}\quad 1+x^2=x \quad\Leftrightarrow\quad x^2-x+1=0$
   Für die linke Seite von $x^2-x+1=0$ finden wir keine Faktorisierung. Tatsächlich hat diese quadratische (!) Gleichung keine Lösung, was wir bald besser verstehen werden.
   Fall 2: $\frac{1}{x}+x=-1 \quad\overset{x\neq 0}{\Rightarrow}\quad 1+x^2=-x \quad\Leftrightarrow\quad x^2+x+1=0$ hat ebenfalls keine Lösung.
   Es gibt hier also gar keine Lösungen: $\underline{\underline{\mathbb{L}=\{\,\}}}.$