KLASSE 155c: Prüfung Algebra III – Lösungen

1. Wie lauten die Lösungsmengen der folgenden quadratischen Gleichungen: (2.5+1.5 P)

   (a) $x(2x+11) = (x+3)(x+4) \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 + 11x \overset{0.5}{=} x^2 + 7x + 12$
   $\Leftrightarrow \quad x^2 + 4x - 12 \overset{0.5}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+6)(x-2) \overset{1}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} \overset{0.5}{=} \{-6, 2\}}}$

   (b) $4x^2 - 3x + \frac{5}{8} = 0 \quad \Rightarrow \quad D = b^2 - 4ac \overset{0.5}{=} 3^2 - 4 \cdot 4 \cdot \frac{5}{8} = 9 - 10 \overset{0.5}{<} 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} \overset{0.5}{=} \{\,\}}}$

2. Die Poolfläche beträgt $54\,\mathrm{m}^2$. Für die Gesamtfläche (Pool + Rasen) ergibt sich aus dem Bild: (1 P)

   $$\text{Gesamtfläche} = (9+2x)(6+2x) = 54 + 30x + 4x^2$$

   Die Rasenfläche (= Gesamtfläche abzüglich Poolfläche) muss gleich gross sein wie die Poolfläche. Daraus schliessen wir auf die Rasenbreite x: (2 P)

   $$54 + 30x + 4x^2 - 54 \overset{0.5}{=} 54 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 + 30x - 54 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 + 15x - 27 \overset{0.5}{=} 0$$
   $$\Leftrightarrow \quad (2x-3)(x+9) \overset{0.5}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \overset{0.5}{=} \frac{3}{2} \text{ oder } -9$$

   Für die Rasenbreite kommt der negative Wert nicht in Frage. Somit ist $\underline{\underline{x = \frac{3}{2}\,\mathrm{m}}}$. (0.5 P)

3. Wir erhalten via quadratische Ergänzung: (3 P)

   $$2x^2 - 6x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + \frac{3}{2} \overset{0.5}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + \frac{9}{4} \overset{1}{=} -\frac{3}{2} + \frac{9}{4}$$
   $$\Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \overset{0.5}{=} \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x - \frac{3}{2} \overset{0.5}{=} \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x_{1/2} \overset{0.5}{=} \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}}}$$

4. Wir substituieren $y = \cos(\alpha)$. Damit lösen wir die QG nach y auf: (2 P)

   $$2\cos^2(\alpha) - 5\sqrt{3}\cos(\alpha) + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y^2 - 5\sqrt{3}\,y + 6 \overset{0.5}{=} 0$$
   $$\Leftrightarrow \quad y_{1/2} \overset{0.5}{=} \frac{5\sqrt{3} \pm \sqrt{\left(5\sqrt{3}\right)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6}}{2 \cdot 2} = \frac{5\sqrt{3} \pm \sqrt{27}}{4} = \frac{5\sqrt{3} \pm 3\sqrt{3}}{4} \overset{1}{=} 2\sqrt{3} \text{ oder } \frac{\sqrt{3}}{2}$$

   Nun müssen wir in die Substitution zurückeinsetzen. Dabei kommt $\cos(\alpha) = 2\sqrt{3} \approx 3.464$ nicht in Frage, denn der Cosinus kann maximal den Wert 1 annehmen. (0.5 P)

   Es folgt also: (1 P)

   $$\cos(\alpha) \overset{0.5}{=} \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \overset{0.5}{=} \underline{\underline{30^\circ}}$$

5. Wir bringen die Gleichung zuerst in die Normalform und betrachten danach die Diskriminiante, die grösser als 0 sein muss: (2.5 P)

$$\frac{1}{4}\,x^2+k^2=(1+k)\,x \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{4}\,x^2-(1+k)\,x+k^2 \overset{0.5}{=} 0$$

$$\Rightarrow\quad D=b^2-4ac \overset{0.5}{=} (1+k)^2-4\cdot\frac{1}{4}\cdot k^2=1+2k+k^2-k^2 \overset{0.5}{=} 1+2k \overset{0.5}{>} 0$$

$$\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{k \overset{0.5}{>} -\frac{1}{2}}}$$

6. Löse die folgenden beiden Gleichungen: (3+3.5 P)

(a) $\dfrac{9x-8}{4x+7}=\dfrac{3x}{2x+5} \quad\Rightarrow\quad (9x-8)(2x+5) \overset{0.5}{=} 3x(4x+7)$ mit $x\neq-\dfrac{7}{4}$ und $x\neq-\dfrac{5}{2}$

$$\Leftrightarrow\quad 18x^2+29x-40 \overset{0.5}{=} 12x^2+21x \quad\Leftrightarrow\quad 3x^2+4x-20 \overset{0.5}{=} 0$$

$\Leftrightarrow\quad (3x+10)(x-2) \overset{1}{=} 0 \quad\Leftrightarrow\quad x=-\dfrac{10}{3}$ oder 2 ✓ $\quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{\mathbb{L} \overset{0.5}{=} \left\{-\dfrac{10}{3},2\right\}}}$

(b) $$\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=\sqrt{2(x+3)} \quad\Rightarrow\quad x+4+2\sqrt{x^2-16}+x-4 \overset{1}{=} 2(x+3)$$

$$\Leftrightarrow\quad 2x+2\sqrt{x^2-16}=2x+6 \quad\Leftrightarrow\quad 2\sqrt{x^2-16}=6 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{x^2-16} \overset{0.5}{=} 3$$

$$\Rightarrow\quad x^2-16 \overset{0.5}{=} 9 \quad\Leftrightarrow\quad x^2=25 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{x \overset{0.5}{=} \pm 5}$$

Proben: $\sqrt{5+4}+\sqrt{5-4}=3+1=4$ und $\sqrt{2(5+3)}=\sqrt{16}=4$ ✓

$\sqrt{-5+4}+\sqrt{-5-4}=\sqrt{-1}+\sqrt{-9}$ ↯ $\quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{x \overset{1}{=} 5}}$