Vorbereitung Prüfung 1: Algebra III, Kap. X–XII – Lösungen

1. Es ergeben sich die folgenden Rechnungen und Resultate:

   (a) $4\sqrt{300}+5\sqrt{192}-6\sqrt{144}=40\sqrt{3}+40\sqrt{3}-72=\underline{\underline{80\sqrt{3}-72}}$

   (b) $\sqrt{125}-\sqrt{75}+3\sqrt{5}-3\sqrt{3}+\sqrt{3}=5\sqrt{5}-5\sqrt{3}+3\sqrt{5}-3\sqrt{3}+\sqrt{3}=\underline{\underline{8\sqrt{5}-7\sqrt{3}}}$

   (c) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}$

   (d) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{18}+\sqrt{12}+\sqrt{6}+2}{3-2}=\underline{\underline{2+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}}}$

   (e) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}-3}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}-3}\cdot\dfrac{2\sqrt{3}+3}{2\sqrt{3}+3}=\dfrac{6+3\sqrt{3}-2\sqrt{3}-3}{12-9}=\underline{\underline{\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}}}$

   (f) $$\left(\sqrt{2-\frac{\sqrt{7}}{2}}-\sqrt{2+\frac{\sqrt{7}}{2}}\right)^2=2-\frac{\sqrt{7}}{2}-2\sqrt{\left(2-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(2+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)}+2+\frac{\sqrt{7}}{2}$$
   $$=4+2\sqrt{4-\frac{7}{4}}=4+2\sqrt{\frac{9}{4}}=4+2\cdot\frac{3}{2}=4+3=\underline{\underline{7}}$$

2. (a) $\sqrt{(-a)^2}=\sqrt{a^2}$ stimmt, denn $(-a)^2=a^2$, also ist auch die Gleichung stets korrekt.

   (b) $\sqrt{a^2}=a$ stimmt nur für $a\geq 0$. Gegenbeispiel: $a=-3\rightarrow\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}=3\neq -3$.

   (c) $\sqrt{a^2}=|a|$ stimmt, denn sowohl die Wurzel, wie auch der Betrag sind stets positive Werte, auch wenn a selber negativ ist. Beispiel: $a=-3\rightarrow\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}=3=|-3|$.

   (d) $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ist grundlegend falsch. Beispiel: $\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$ ist nicht dasselbe wie $\sqrt{16}+\sqrt{9}=4+3=7$.

3. Löse die folgenden quadratischen Gleichungen möglichst effizient für $x\in\mathbb{R}$:

   (a) $3x^2=x+10\quad\Leftrightarrow\quad 3x^2-x-10=0\quad\Leftrightarrow\quad(3x+5)(x-2)=0\quad\Rightarrow\quad\underline{\underline{\mathbb{L}=\left\{-\frac{5}{3},2\right\}}}$

   (b) $-6x^2+17x-13=0\quad\Rightarrow\quad D=17^2-4\cdot(-6)\cdot(-13)=289-312<0\quad\Rightarrow\quad\underline{\underline{\mathbb{L}=\{\}}}$

   (c) $4x^2+x-\frac{3}{2}=0\quad\Leftrightarrow\quad 8x^2+2x-3=0\quad\Leftrightarrow\quad(4x+3)(2x-1)=0\quad\Rightarrow\quad\underline{\underline{\mathbb{L}=\left\{-\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right\}}}$

   (d) $\frac{3}{8}x^2-2x+\frac{8}{3}=0\quad\Leftrightarrow\quad 9x^2-48x+64=0\quad\Leftrightarrow\quad(3x-8)^2=0\quad\Leftrightarrow\quad\underline{\underline{x=\frac{8}{3}}}$

   (e) $3x^2+21=18x\quad\Leftrightarrow\quad x^2-6x+7=0\quad\Leftrightarrow\quad x_{1/2}=\dfrac{6\pm\sqrt{36-28}}{2}=\dfrac{6\pm\sqrt{8}}{2}=\underline{\underline{3\pm\sqrt{2}}}$

   (f) $2x^2-49=0\quad\Leftrightarrow\quad x^2=\dfrac{49}{2}\quad\Leftrightarrow\quad x=\pm\dfrac{7}{\sqrt{2}}=\underline{\underline{\pm\dfrac{7\sqrt{2}}{2}}}$

4. In Abhängigkeit des Parameters k erhalten wir für die Lösungen:

   (a) $x^2 + kx - 2k = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \dfrac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2k)}}{2} = \underline{\underline{\dfrac{-k \pm \sqrt{k^2 + 8k}}{2}}}$

   (b) $x^2 - kx + k = 1 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \dfrac{k \pm \sqrt{k^2 - 4 \cdot 1 \cdot k}}{2} = \underline{\underline{\dfrac{k \pm \sqrt{k^2 - 4k}}{2}}}$

   (c) $x^2 - kx + k = x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - kx - x + k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - (k+1)x + k = 0$

$$\Rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{k + 1 \pm \sqrt{(k+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot k}}{2} = \frac{k + 1 \pm \sqrt{k^2 + 2k + 1 - 4k}}{2}$$
$$= \frac{k + 1 \pm \sqrt{k^2 - 2k + 1}}{2} = \frac{k + 1 \pm \sqrt{(k-1)^2}}{2} = \underline{\underline{\frac{k + 1 \pm |k - 1|}{2}}}$$

   In Aufgabe (c) können wir sogar noch einen Schritt weiter gehen, indem wir zwei Fälle unterscheiden:

   Fall $k > 1 \quad \Rightarrow \quad |k-1| = k - 1$ (z.B. $k = 3 \Rightarrow |3-1| = |2| = 2 = 3 - 1$)

$$\Rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{k + 1 \pm (k-1)}{2} = \frac{k + 1 \pm k \mp 1}{2} = \frac{2k}{2} \text{ oder } \frac{2}{2} = \underline{k \text{ oder } 1}$$

   Fall $k < 1 \quad \Rightarrow \quad |k-1| = 1 - k$ (z.B. $k = -2 \Rightarrow |-2-1| = |-3| = 3 = 1 - (-2)$)

$$\Rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{k + 1 \pm (1-k)}{2} = \frac{k + 1 \pm 1 \mp k}{2} = \frac{2}{2} \text{ oder } \frac{2k}{2} = \underline{1 \text{ oder } k}$$

   Wir erkennen, dass beide Fälle auf dieselben Resultate führen und halten somit fest: $\underline{\underline{\mathbb{L} = \{1, k\}}}$.

   Anmerkung: An der Prüfung würde ich diese genauere Abklärung so nicht von Ihnen erwarten. Das erste Resultat $\underline{\underline{x_{1/2} = \frac{k+1\pm|k-1|}{2}}}$ würde genügen.

   Zweite Anmerkung: Wer allerdings ganz besonders clever ist, könnte die ursprüngliche Gleichung auf sehr kluge Art faktorisieren und so die genaue Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{1, k\}$ direkt erhalten:

$$x^2 - kx + k = x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - kx - x + k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-k) - (x-k) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (x-1)(x-k) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{1, k\}}}$$

   (Würde mir jemand das an der Prüfung so notieren, würde ich sicher 3 Bonuspunkte vergeben. ☺)

5. Für die Werte von q und für die Lösungen $x_{1/2}$ erhalten wir:

   (a) $x^2 - qx - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad D = q^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = q^2 + 4$ ist stets grösser als 0

   $\Rightarrow$ für alle $q \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung zwei Lösungen. Diese lauten:

   $\Rightarrow \quad \underline{\underline{x_{1/2} = \dfrac{q \pm \sqrt{q^2 + 4}}{2}}}$

   (b) $x^2 + 2x = -3q \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2x + 3q = 0 \quad \Rightarrow \quad 2^2 = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 3q = 4 - 12q \overset{!}{\geq} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{q \leq \dfrac{1}{3}}}$

   $\Rightarrow \quad x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 12q}}{2} = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{1 - 3q}}{2} = \underline{\underline{-1 \pm \sqrt{1 - 3q}}}$

   (c) $2x^2 = 36 - 6q \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 18 - 3q$ hat nur eine Lösung für $18 - 3q \geq 0$ resp. für $\underline{\underline{q \leq 6}}$

   $\Rightarrow \quad \underline{\underline{x_{1/2} = \pm\sqrt{18 - 3q}}}$

   (d) $qx^2 + x + 1 = 3x^2 \equiv (q-3)x^2 + x + 1 = 0$

   $\Rightarrow \quad D = 1^2 - 4(q-3) \cdot 1 = 1 - 4q + 12 = 13 - 4q \overset{!}{\geq} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{q \leq \dfrac{13}{4}}}$

   $\Rightarrow \quad \underline{\underline{x_{1/2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{13 - 4q}}{2(q-3)}}}$

6. Bestimme $x \in \mathbb{R}$ mittels quadratischer Ergänzung:

   (a) $x^2 = 7 - 8x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 8x = 7 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 8x + 16 = 7 + 16$
   $\Leftrightarrow \quad (x+4)^2 = 23 \quad \Leftrightarrow \quad x + 4 = \pm\sqrt{23} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x_{1/2} = -4 \pm \sqrt{23}}}$

   (b) $x^2 - \frac{2}{5}x = \frac{3}{25} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{25} = \frac{3}{25} + \frac{1}{25} \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$
   $\Leftrightarrow \quad x - \frac{1}{5} = \pm\frac{2}{5} \quad \Leftrightarrow \quad x_{1/2} = \frac{1 \pm 2}{5} = \underline{\underline{-\frac{1}{5} \text{ oder } \frac{3}{5}}}$

   (c) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x = \frac{14}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{1}{2}x = 14 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = 14 + \frac{1}{16}$
   $\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{225}{16} \quad \Leftrightarrow \quad x + \frac{1}{4} = \pm\frac{15}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x_{1/2} = \frac{-1 \pm 15}{4} = \underline{\underline{\frac{7}{2} \text{ oder } -4}}$

   (d) $4x^2 - x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - \frac{1}{4}x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{64} = \frac{1}{2} + \frac{1}{64}$
   $\Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{8}\right)^2 = \frac{33}{64} \quad \Leftrightarrow \quad x - \frac{1}{8} = \pm\frac{\sqrt{33}}{8} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}}}$

7. Aus der Mitternachtsformel ergibt sich jeweils $x_{1/2}$:

   (a) $-2x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{-\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4 \cdot (-2) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)}}{2 \cdot (-2)} = \frac{3}{4} \text{ oder } \frac{1}{2}$
   $\Rightarrow \quad -2x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{4} = \underline{\underline{-2\left(x - \frac{3}{4}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)}}$

   Alternativ geht natürlich ein Zweiklammeransatz:
   $-2x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}\left(8x^2 - 10x + 3\right) = -\frac{1}{4}(4x-3)(2x-1) = \underline{\underline{-2\left(x - \frac{3}{4}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)}}$

   (b) $-\frac{5}{2}x^2 + \frac{11}{2}x + \frac{6}{5} \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{-\frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4} + 4 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{6}{5}}}{-5} = \frac{\frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4}}}{5} = \frac{12}{5} \text{ oder } -\frac{1}{5}$
   $\Rightarrow \quad -\frac{5}{2}x^2 + \frac{11}{2}x + \frac{6}{5} = \underline{\underline{-\frac{5}{2}\left(x - \frac{12}{5}\right)\left(x + \frac{1}{5}\right)}}$ Oder mit Zweiklammeransatz:
   $-\frac{5}{2}x^2 + \frac{11}{2}x + \frac{6}{5} = -\frac{1}{10}\left(25x^2 - 55x - 12\right) = -\frac{1}{10}(5x+1)(5x-12) = \underline{\underline{-\frac{5}{2}\left(x + \frac{1}{5}\right)\left(x - \frac{12}{5}\right)}}$

   (c) $x^2 + x - 1 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$
   $\Rightarrow \quad x^2 + x - 1 = \underline{\underline{\left(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}}$

   (d) $\frac{4}{5}x^2 - \frac{12}{5}x + \frac{9}{5} \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{\frac{12}{5} \pm \sqrt{\frac{144}{25} - \frac{144}{25}}}{2 \cdot \frac{4}{5}} = \frac{\frac{12}{5}}{\frac{8}{5}} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$
   $\Rightarrow \quad \frac{4}{5}x^2 - \frac{12}{5}x + \frac{9}{5} = \underline{\underline{\frac{4}{5}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2}}$

   Die Variante mit direkter Faktorisierung muss demnach auf eine binomische Formel führen:
   $\frac{4}{5}x^2 - \frac{12}{5}x + \frac{9}{5} = \frac{1}{5}\left(4x^2 - 12x + 9\right) = \frac{1}{5}(2x-3)^2 = \underline{\underline{\frac{4}{5}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2}}$

8. Das Rechteck habe die Länge l und die Breite b. Dann folgt für die Fläche A und für den Umfang U:

$$A = l \cdot b = 25 \qquad \text{und} \qquad U = 2l + 2b = 25$$

Wir lösen eine der beiden Gleichungen nach l oder b auf und setzen den Ausdruck in die andere Gleichung ein:

$$b = \frac{25}{l} \quad \Rightarrow \quad 2l + 2 \cdot \frac{25}{l} = 25$$

Diese Gleichung in l können wir lösen:

$$2l + 2 \cdot \frac{25}{l} = 25 \quad \Leftrightarrow \quad 2l^2 - 25l + 50 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2l-5)(l-10) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad l_{1/2} = \frac{5}{2} \text{ oder } 10$$

Offenbar gibt es zwei Lösungen für l. Dann folgen daraus zwei Lösungen für b:

$$b_1 = \frac{25}{l_1} = \frac{25}{\frac{5}{2}} = 10 \qquad \text{und} \qquad b_2 = \frac{25}{l_2} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$$

Es ergeben sich für b die genau gleichen Möglichkeiten wie für l. Das muss ja so sein, denn die ursprünglichen beiden Gleichungen sind symmetrisch in l und b. D.h., man könnte l und b verstauschen und die Gleichungen würden immer noch genau gleich lauten. Für l und für b müssen also von Anfang an die gleichen Werte herauskommen. Da aber b die Breite und l die Länge sein soll, ist ganz klar, was wir nun als Resultat angeben: $\underline{\underline{\text{Länge } l = 10\,\mathrm{m} \text{ und Breite } b = \tfrac{5}{2}\,\mathrm{m}}}$.

9. Bestimme $x \in \mathbb{R}$ resp. $\alpha \in [0°; 90°]$ mittels einer Substitution:

(a) $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - 4\left(x + \frac{3}{2}\right) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 - 4y + 1 = 0 \quad \text{mit} \quad y = x + \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \quad y_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = y - \frac{3}{2} = 2 \pm \sqrt{3} - \frac{3}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2} \pm \sqrt{3}}}$

(b) $4\cos^2(\alpha) - 8\cos(\alpha) = -3 \quad \Rightarrow \quad 4y^2 - 8y + 3 = 0 \quad \text{mit} \quad y = \cos(\alpha)$

$\Leftrightarrow \quad (2y-3)(2y-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{3}{2} \text{ oder } \frac{1}{2}$

Der Cosinus kann keine Werte > 1 annehmen, denn er steht ja für das Verhältnis $\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$ in einem rechtwinkligen Dreieck, wo die Hypotenuse stets grösser ist als jede der Katheten. Folglich kommt $\cos(\alpha) = \frac{3}{2}$ nicht in Frage.

$\Rightarrow \quad \cos(\alpha) = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{60°}}$

(c) $4\left(\frac{4-x^2}{2}\right)^2 - 16\left(\frac{4-x^2}{2}\right) + 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4y^2 - 16y + 15 = 0 \quad \text{mit} \quad y = \frac{4-x^2}{2}$

$\Leftrightarrow \quad (2y-5)(2y-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{5}{2} \text{ oder } \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \quad \frac{4-x^2}{2} = \frac{5}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -1 \quad ↯ \qquad \Rightarrow \quad \frac{4-x^2}{2} = \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = \pm 1}}$

(d) $\left(x^2 - 4x - 3\right)^2 = 3(x^2 - 4x + 3) + 54 \quad \Rightarrow \quad y^2 - 3y - 54 = 0 \quad \text{mit} \quad y = x^2 - 4x - 3$

$\Leftrightarrow \quad (y+6)(y-9) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -6 \text{ oder } 9$

$\Rightarrow \quad x^2 - 4x - 3 = -6 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \text{ od. } 3$

$\Rightarrow \quad x^2 - 4x - 3 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x - 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)(x-6) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2 \text{ od. } 6$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{-2, 1, 3, 6\}}}$

10. Gesuchte Zahl: x. Aus der Aufgabenstellung folgt die Gleichung ($0.01 = \frac{1}{100}$):

$$\left(\frac{1}{100} + x\right)^2 + \left(\frac{1}{100} - x\right)^2 = \frac{1}{100} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{10\,000} + \frac{2}{10\,000}\,x + x^2 + \frac{1}{10\,000} - \frac{2}{10\,000}\,x + x^2 = \frac{1}{100}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{10\,000} + 2x^2 = \frac{1}{100} \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 = \frac{1}{100} - \frac{2}{10\,000} \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 = \frac{100-2}{10\,000}$$
$$\Leftrightarrow \quad 2x^2 = \frac{98}{10\,000} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{49}{10\,000} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{7}{100}$$

Da gemäss Aufgabenstellung nur die positive Lösung in Frage kommt, lautet das Resultat $\underline{\underline{x = \frac{7}{100} = 0.07}}$.

11. Löse die folgenden Gleichungen in $\mathbb{R}$:

(a) $\dfrac{5}{x+1} + \dfrac{6}{x+2} = \dfrac{14}{x+3} \quad \Rightarrow \quad 5(x+2)(x+3) + 6(x+1)(x+3) = 14(x+1)(x+2)$

$\Leftrightarrow \quad 5x^2 + 25x + 30 + 6x^2 + 24x + 18 = 14x^2 + 42x + 28 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 3x^2 - 7x - 20$

$\Leftrightarrow \quad (3x+5)(x-4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{-\frac{5}{3}, 4\right\}}} \quad \checkmark$

(b) $\dfrac{x}{2x-4} - \dfrac{4}{x+2} = \dfrac{1}{x-2} \quad \Rightarrow \quad x(x+2) - 8(x-2) = 2(x+2)$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2x - 8x + 16 = 2x + 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 8x + 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)(x-6) = 0$

dabei kommt $x = 2$ nicht als Lösung in Frage $\quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = 6}}$

(c) $\dfrac{x+1}{x^2-x} + \dfrac{x-2}{x^2+x} = \dfrac{x+3}{x^2-1} \quad \Rightarrow \quad (x+1)^2 + (x-2)(x-1) = x(x+3)$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2x + 1 + x^2 - 3x + 2 = x^2 + 3x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x-3) = 0$

dabei kommt $x = 1$ nicht als Lösung in Frage $\quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = 3}}$

(d) $2x = 1 - \sqrt{3-4x} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3-4x} = 1 - 2x \quad \Rightarrow \quad 3 - 4x = 1 - 4x + 4x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 = 2$

$\Leftrightarrow \quad x^2 = \dfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

die Wurzel $\sqrt{3-4x}$ existiert für beide Lösungen, denn im kritischen Fall $x = +\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ist $3 - 4 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 3 - 2\sqrt{2} \approx 3 - 2 \cdot 1.415 = 3 - 2.83 > 0$. Allerdings sehen wir in diesem positiven Fall direkt, dass die Gleichung $2x = 1 - \sqrt{3-4x}$ trotzdem nicht stimmen kann, denn links ist $2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} > 1$, währenddem rechts die per Definition positive Wurzel von 1 subtrahiert wird. Bei der negativen Lösung $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sieht es besser aus: Links ergibt sich $-\sqrt{2}$ und auch rechts entsteht eine negative Zahl, denn $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} > 1$. Somit dürfen wir bei der Kontrolle 1 subtrahieren und dann als Äquivalenzumfromung beide Seiten quadrieren:

$\Rightarrow \quad -\sqrt{2} = 1 - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt{2} - 1 = -\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \quad 2 + 2\sqrt{2} + 1 = 3 + 2\sqrt{2} \quad \checkmark \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}}}$

(e) $\sqrt{5x+1}+\sqrt{8x+1}=1 \quad\Rightarrow\quad 5x+1+2\sqrt{40x^2+13x+1}+8x+1=1$

$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{40x^2+13x+1}=-1-13x \quad\Rightarrow\quad 4(40x^2+13x+1)=1+26x+169x^2$

$\Leftrightarrow \quad 160x^2+52x+4=1+26x+169x^2 \quad\Leftrightarrow\quad 0=9x^2-26x-3$

$\Leftrightarrow \quad (9x+1)(x-3)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=-\dfrac{1}{9}$ oder 3

Proben: $\sqrt{5\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)+1}+\sqrt{8\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)+1}=\sqrt{\frac{4}{9}}+\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1 \quad \checkmark$

$\sqrt{5\cdot 3+1}+\sqrt{8\cdot 3+1}=\sqrt{16}+\sqrt{25}=4+5=9 \quad ↯ \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{x=-\frac{1}{9}}}$

(f) $\sqrt{x-15}+\sqrt{x}=\sqrt{x+9} \quad\Rightarrow\quad x-15+2\sqrt{x^2-15x}+x=x+9$

$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{x^2-15x}=-x+24 \quad\Rightarrow\quad 4(x^2-15x)=x^2-48x+576$

$\Leftrightarrow \quad 4x^2-60x=x^2-48x+576 \quad\Leftrightarrow\quad 3x^2-12x-576=0$

$\Leftrightarrow \quad x^2-4x-192=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-12)(x-16)=0 \quad\Rightarrow\quad x=12$ oder 16

Proben: $x=12$ versagt bereits in der ersten Wurzel: $\sqrt{12-15}$

$\sqrt{16-15}+\sqrt{16}=1+4=5$ und $\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5 \quad \checkmark \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{x=16}}$

12. Seien a und b die Katheten und c die Hypotenuse, so folgern wir aus der Aufabenstellung und mit dem Satz des Pythagoras:

$$a+1=c \qquad \text{und} \qquad a+b+c=20 \qquad \text{und} \qquad a^2+b^2=c^2$$

Dabei habe ich angenommen, dass a diejenige Kathete ist, die um $1\,\mathrm{cm}$ kürzer als die Hypotenuse ist.

Nun können wir die ersten beiden Gleichungen ineinander einsetzen, z.B. so:

$$a+1=c \quad\Leftrightarrow\quad \underline{a=c-1}$$
$$a+b+c=20 \quad\Leftrightarrow\quad b=20-a-c=20-(c-1)-c=21-2c \quad \text{kurz:} \quad \underline{b=21-2c}$$

Mit diesen Ausdrücken für a und b gehen wir in den Satz des Pythagoras hinein, der so zu einer quadratischen Gleichung für die Hypotenuse c wird:

$$a^2+b^2=(c-1)^2+(21-2c)^2=c^2-2c+1+441-84c+4c^2=5c^2-86c+442 \overset{!}{=} c^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 4c^2-86c+442=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2c^2-43c+221=0 \quad\Leftrightarrow\quad (2c-17)(c-13)=0$$
$$\Leftrightarrow \quad c=13 \text{ oder } \frac{17}{2}$$

Mit $c=13$ erhalten wir $a=13-1=12$ und $b=21-2\cdot 13=-5$. Das ist unsinnig, denn Dreiecksseiten haben keine negativen Längen.

Mit $c=\frac{17}{2}$ ist $a=\frac{17}{2}-1=\frac{15}{2}$ und $b=21-2\cdot\frac{17}{2}=4$. Das passt!

Das rechtwinklige Dreieck hat also die Seiten $\underline{\underline{a=\frac{15}{2}\,\mathrm{cm},\ b=4\,\mathrm{cm} \text{ und } c=\frac{17}{2}\,\mathrm{cm}.}}$