VORBEREITUNG PRÜFUNG I: Algebra, Kap. X–XII

Klasse 155c / AGe / Prüfungstermin: Di 26.3.24

Prüfungsinformationen

- An der Prüfung ist **kein Taschenrechner** erlaubt.
- Die Prüfung dauert **50 Minuten** (60 Minuten mit NAM).
- In allen Aufgaben muss ich nachvollziehen können, wie Sie zum Resultat gelangt sind. Bei Wurzelgleichungen muss zudem ersichtlich sein, dass Sie die Probe gemacht haben.
- Die Resultate sind doppelt zu unterstreichen.

Prüfungsinhalte

- Lernziele zu Kapitel X:
  - Grundverständnis der Quadratwurzel $\sqrt{a}$ als positive Lösung der Gleichung $x^2 = a$ mit $a \geq 0$.
  - Wird bei einer Gleichungsumformung die Wurzel auf beide Seiten angewendet, so entstehen in der Regel zwei Lösungen $\rightarrow$ auf einer Seite $\pm$ einfügen.
  - Von negativen Zahlen kann in $\mathbb{R}$ keine Wurzel berechnet werden.
  - Rechenregeln für Wurzeln: $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.
  - Teilweise radizieren, z.B. $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ oder $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.
  - Darstellung von Resultaten mit Wurzeln: Normalform $q_0 + q_1\sqrt{n_1} + q_2\sqrt{n_2} + \ldots$
  - Wegschaffen grösserer Nennerausdrücke mit Wurzeln. Beispiel: $\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ mit $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ erweitern.
- Lernziele zu Kapitel XI:
  - Lineare Gleichungen (LG) und quadratische Gleichungen (QG) als solche erkennen und wissen, wie die Normalform einer QG aussieht: $ax^2 + bx + c = 0$.
  - Wissen, wie QGs (in Normalform) effizient gelöst werden. Probieren mit direkter Faktorisierung (ausklammern, binomische Formeln, Zweiklammeransatz) und danach Fallunterscheidung oder sonst mit Mitternachtsformel (MNF).
  - In Normalform gegebene QGs mittels quadratischer Ergänzung lösen können.
  - Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ erlaubt schnelle Beurteilung, ob eine QG keine, eine oder zwei Lösungen besitzt.
  - Faktorisierung verschiedener Ausdrücke durch Ausklammern, binomische Formeln, Zweiklammeransatz, Mitternachtsformel.
  - Lösen einfacher Satzaufgaben, die auf LGs oder QGs führen.
  - Lösen von QGs mit Parametern inkl. Beurteilung, wie viele Lösungen je nach Parameterwert entstehen.
  - Lösen von Aufgaben mittels Substitution.
  - Lösen von Bruchgleichungen, die auf LGs oder QGs führen.
- Lernziele zu Kapitel XII:
  - Lösen von Wurzelgleichungen, die auf LGs oder QGs führen inkl. notwendiger Proben.
- Die folgenden Inhalte gehören ganz explizit **nicht** zum Prüfungsstoff:
  - Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$.
  - Herleitung der Mitternachtsformel.
  - Satz von Vieta (Serie XI.B, Aufgabe 5).

Vorbereitungsaufgaben mit mehrheitlich überdurchschnittlichem Schwierigkeitsgrad!

1. Rechenaufgaben mit Wurzeln – rechne aus und bringe auf Normalform:

   (a) $4\sqrt{300}+5\sqrt{192}-6\sqrt{144}$ (b) $\sqrt{125}-\sqrt{75}+3\sqrt{5}-3\sqrt{3}+\sqrt{3}$

   (c) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ (d) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ (e) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}-3}$ (f) $\left(\sqrt{2-\dfrac{\sqrt{7}}{2}}-\sqrt{2+\dfrac{\sqrt{7}}{2}}\right)^2$

2. Welche Aussagen stimmen allgemein (d.h. für beliebige $a,b\in\mathbb{R}$)?

   (a) $\sqrt{(-a)^2}=\sqrt{a^2}$ (b) $\sqrt{a^2}=a$ (c) $\sqrt{a^2}=|a|$ (d) $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

3. Löse die folgenden quadratischen Gleichungen möglichst effizient für $x\in\mathbb{R}$:

   (a) $3x^2=x+10$ (b) $-6x^2+17x-13=0$ (c) $4x^2+x-\dfrac{3}{2}=0$

   (d) $\dfrac{3}{8}x^2-2x+\dfrac{8}{3}=0$ (e) $3x^2+21=18x$ (f) $2x^2-49=0$

4. Es sei $x\in\mathbb{R}$ die Unbekannte und $k\in\mathbb{R}$ sei so gewählt, dass Lösungen existieren. Gib diese Lösungen in Abhängigkeit von k an:

   (a) $x^2+kx-2k=0$ (b) $x^2-kx+k=1$ (c) $x^2-kx+k=x$

5. In den folgenden Gleichungen ist $x\in\mathbb{R}$ die Unbekannte. Für welche Werte des Parameters $q\in\mathbb{R}$ hat die Gleichung mindestens eine Lösung? Wie lauten die möglichen Lösungen in diesen Fällen?

   (a) $x^2-qx-1=0$ (b) $x^2+2x=-3q$ (c) $2x^2=36-6q$ (d) $qx^2+x+1=3x^2$

6. Bestimme $x\in\mathbb{R}$ mittels quadratischer Ergänzung:

   (a) $x^2=7-8x$ (b) $x^2-\dfrac{2}{5}x=\dfrac{3}{25}$ (c) $\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{1}{6}x=\dfrac{14}{3}$ (d) $4x^2-x-2=0$

7. Bringe auf die Form $a(x-x_1)(x-x_2)$:

   (a) $-2x^2+\dfrac{5}{2}x-\dfrac{3}{4}$ (b) $-\dfrac{5}{2}x^2+\dfrac{11}{2}x+\dfrac{6}{5}$ (c) x^2+x-1 (d) $\dfrac{4}{5}x^2-\dfrac{12}{5}x+\dfrac{9}{5}$

8. Der Umfang eines Rechtecks betrage $25\,\mathrm{m}$, sein Flächeninhalt $25\,\mathrm{m}^2$. Seitenlängen?

9. Bestimme $x\in\mathbb{R}$ resp. $\alpha\in[0°;90°]$ mittels einer Substitution:

   (a) $\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-4\left(x+\dfrac{3}{2}\right)+1=0$ (b) $4\cos^2(\alpha)-8\cos(\alpha)=-3$

   (c) $4\left(\dfrac{4-x^2}{2}\right)^2-16\left(\dfrac{4-x^2}{2}\right)+15=0$ (d) $\left(x^2-4x-3\right)^2=3(x^2-4x+3)+54$

10. Welche positive Zahl muss man zu 0.01 addieren und von 0.01 subtrahieren, damit die Summe der Quadrate der beiden Ergebnisse gleich 0.01 ist?

11. Löse die folgenden Gleichungen in $\mathbb{R}$:

    (a) $\dfrac{5}{x+1}+\dfrac{6}{x+2}=\dfrac{14}{x+3}$ (b) $\dfrac{x}{2x-4}-\dfrac{4}{x+2}=\dfrac{1}{x-2}$

    (c) $\dfrac{x+1}{x^2-x}+\dfrac{x-2}{x^2+x}=\dfrac{x+3}{x^2-1}$ (d) $2x=1-\sqrt{3-4x}$

    (e) $\sqrt{5x+1}+\sqrt{8x+1}=1$ (f) $\sqrt{x-15}+\sqrt{x}=\sqrt{x+9}$

12. In einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Umfang $20\,\mathrm{cm}$ misst, ist die Hypotenuse um $1\,\mathrm{cm}$ länger als eine Kathete. Berechne die exakte Länge der Hypotenuse.