Repetition zum Quadrieren

$8^2 = 8 \cdot 8 = 64$ $\qquad (-10)^2 = (-10)(-10) = 100$ $\qquad (0.1)^2 = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100} = 0.01$

$\left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{16}$ $\qquad (3x)^2 = 3x \cdot 3x = 9x^2$

Was genau verstehen wir unter einer Quadratwurzel?

Frage: Welche Lösung(en) hat die Gleichung $x^2 = 16$?

Antwort: Die Lösungen sind diejenigen Zahlen x, die quadriert 16 ergeben, also $\mathbb{L} = \{-4, 4\}$.

Folgefrage: Welche Lösung(en) besitzt die Gleichung $x^2 = a$?

Wir bemerken zunächst: Nur für $a \geq 0$ kann überhaupt eine Lösung existieren, denn Quadratzahlen sind stets positiv.

Und weiter: Für $a > 0$ besitzt $x^2 = a$ stets zwei Lösungen.

> **Definition der Quadratwurzel**
>
> *Als* **Quadratwurzel** $\sqrt{a}$ *einer Zahl* $a \geq 0$ *bezeichnet man die positive Lösung der Gleichung*
>
> $$x^2 = a$$
>
> *mit dem Spezialfall* $\sqrt{0} = 0$.
>
> a *heisst in diesem Zusammenhang* **Radikant**. *Die Operation heisst* **Wurzel ziehen** *oder* **radizieren** *(von lat. radix = die Wurzel).*

Wurzel und Betrag

Frage: Wie lautet das radizierte Ergebnis von $\sqrt{a^2}$?

Überlegungen: $\sqrt{a^2} = a$ ist im Allgemeinen nicht korrekt!

Resp. genauer: Die Aussage $\sqrt{a^2} = a$ ist für bestimmte Werte von a richtig, für andere aber falsch:

$\sqrt{5^2} = 5$ ist richtig, aber $\sqrt{(-3)^2} = -3$ ist falsch, weil $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$

Folglich gilt für $a > 0$ und für $a = 0$: $\sqrt{a^2} = a$.

Und für $a < 0$ folgt: $\sqrt{a^2} = -a$ Bsp.: $\sqrt{(-5)^2} = -(-5) = 5$.

Antwort: Unter Verwendung der Betragsstriche können wir allgemein korrekt schreiben:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Beispiele:

$\sqrt{a^4} = |a^2| = a^2$ $\qquad \sqrt{b^6} = |b^3| = |b|^3$ $\qquad \sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = |a - b|$

$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ $\qquad \sqrt{\sqrt{16}} = 2$

Irrationale Zahlen

Bsp. rationaler Wurzeln: $\sqrt{25} = 5$ $\quad$ $\sqrt{1.21} = \sqrt{\frac{121}{100}} = \frac{11}{10} = 1.1$ $\quad$ $\sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{5}{7} = 0.\overline{714285}$

Hingegen sagt uns der Taschenrechner für die Wurzel von 2:

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095\ldots$$

$\sqrt{2}$ scheint weder ein abbrechender, noch ein periodischer Dezimalbruch zu sein. Offenbar ist $\sqrt{2}$ nicht rational, kann also nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen geschrieben werden!

Dies wollen wir an dieser Stelle nun streng mathematisch beweisen...

Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$

- **Verwendete Beweistechnik: Widerspruchsbeweis** (lat. *reductio ad absurdum*)

  Wir nehmen das Gegenteil einer Behauptung an und schließen daraus auf einen logischen Widerspruch, aus dem dann eben folgt, dass die Behauptung selber richtig sein muss.

- **Behauptung**

  $\sqrt{2}$ ist irrational. Das bedeutet: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ resp. $\sqrt{2}$ kann nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen geschrieben werden.

  (Rep.: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \,|\, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$. Zu jedem $q \in \mathbb{Q}$ gehört ein ganz bestimmter gekürzter Bruch, also zwei eindeutige Zahlen $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$.)

- **Annahme (= Gegenteil der Behauptung)**

  $\sqrt{2}$ lässt sich als gekürzter Bruch zweier ganzer Zahlen schreiben. Es sei also:

  $$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \qquad \text{mit} \quad m \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{sowie} \quad \mathrm{ggT}(m,n) = 1$$

- **Folgerungen aus der Annahme** (*reductio...*)

- **Widerspruch** (*... ad absurdum*)

  Sind m und n gerade, so ist der Bruch $\sqrt{2} = \frac{m}{n} = \frac{2p}{2q}$ im Widerspruch zur Annahme weiter kürzbar.

- **Schluss auf das Gegenteil der Annahme**

  Da die Annahme $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ auf einen logischen Widerspruch führt, muss diese Annahme falsch und das Gegenteil davon, also unsere Behauptung, wahr sein. $\sqrt{2}$ ist folglich **irrational**, lässt sich also nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen schreiben lassen!

  $\square$ oder q.e.d.

Drei Rechenregeln zum Umgang mit Wurzeln

i. Eigentlich keine Regel, sondern ein **Verbot**!

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b} \qquad \text{und folglich auch:} \qquad \sqrt{a^2+b^2} \neq a+b$$

Begründung: $\sqrt{a+b}$ ist die (positive) Lösung der Gleichung $x^2 = a+b$, aber $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ist sicher keine Lösung dieser Gleichung, denn:

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \neq a+b$$

Zahlenbeispiel:

Konsequenz: Ausdrücke wie $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ oder $\sqrt{u}+\sqrt{v}$ lassen sich nicht weiter vereinfachen!

ii. **Multiplikationsregel für Wurzeln:** Für alle reellen Zahlen $a \geq 0$ und $b \geq 0$ gilt:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

Zahlenbeispiel:

iii. **Divisionsregel für Wurzeln:** Für alle reellen Zahlen $a \geq 0$ und $b \geq$ gilt:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Zahlenbeispiel:

Teilweises Radizieren und Darstellungsregeln

Die Quadratwurzel einer ungeraden Potenz a^n (mit $n \geq 3$) kann **teilweise radiziert** werden. D.h., ein Teil der Potenz kann aus der Wurzel herausgezogen werden:

$$\textbf{Beispiel:} \qquad \sqrt{7^5} = \sqrt{7^4 \cdot 7} = \sqrt{7^4} \cdot \sqrt{7} = 7^2 \cdot \sqrt{7} = 49\sqrt{7}$$

In der Regel vereinfachen wir Wurzeln durch teilweises Radizieren soweit es eben geht!

Weiter ist es unüblich Wurzeln im Nenner eines Bruches stehen zu lassen oder Brüche unter der Wurzel stehen zu lassen. Unter der **Normalform eines Wurzelterms** verstehen wir die Darstellung

$$q_0 + q_1\sqrt{n_1} + q_2\sqrt{n_2} + \ldots \qquad \text{mit} \quad q_0, q_1, q_2, \ldots \in \mathbb{Q} \quad \text{und} \quad n_1, n_2, n_3, \ldots \in \mathbb{N}$$

wobei alle Radikanten $n_1, n_2, n_3, \ldots$ quadratfrei und voneinander verschieden sind, sodass man nicht mehr teilweise radizieren und auch nicht mehr weiter zusammenfassen kann.

Resultate mit Wurzeln geben wir in dieser Normalform an!