Kapitel 11: Quadratische Gleichungen

A. Repetition zur linearen Gleichung (LG)

- Jede Gleichung für die **Unbekannte** $x \in \mathbb{R}$, die sich durch Äquivalenzumformungen auf die Form

  $$ax = b \qquad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad a \neq 0$$

  bringen lässt, bezeichnen wir als **lineare Gleichung** – kurz: **LG**.

- a und b nennen wir **Parameter** (der Gleichung). Sie stehen für beliebige reelle Zahlen ($a \neq 0$).

- Die Lösung der Gleichung ergibt sich aus der Division durch a:

  $$ax = b \qquad \Leftrightarrow \qquad \underline{\underline{x = \frac{b}{a}}}$$

- Beispiele:

  $$3x = \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{\sqrt{2}}{3}}} \qquad \text{oder} \qquad -4x = \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2}{-4 \cdot 3} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = -\frac{1}{6}}} \qquad \text{oder}$$

  $$mx + 3 = 4n - 5x \quad \Leftrightarrow \quad mx + 5x = 4n - 3 \quad \Leftrightarrow \quad x(m+5) = 4n - 3 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{4n-3}{m+5}}}$$

Erkenntnis: LGs sind in aller Regel recht einfach zu lösen. Wir bringen alle Glieder mit x auf eine Seite und den Rest auf die andere, dann klammern wir x aus und teilen durch die Klammer.

B. Die Normalform der quadratischen Gleichung (QG)

- Jede Gleichung für die **Unbekannte** $x \in \mathbb{R}$, die sich durch Äquivalenzumformungen auf die **Normalform**

  $$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{mit} \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad a \neq 0$$

  bringen lässt, bezeichnen wir als **quadratische Gleichung** – kurz: **QG**.

- Rep.: ax^2 ist das **quadratische Glied**, bx das **lineare Glied** und c das **konstante Glied**.

  a, b und c sind die **Parameter** der Gleichung.

- Der Parameter a darf nicht gleich 0 sein, denn sonst hätten wir es nicht mit einer QG zu tun.

Momentaner Stand: Wir sind QGs erst wenige Male begegnet und haben uns noch keine allgemeine Gedanken zu deren Lösung gemacht. Dies soll nun geschehen.

C. Bisherige Beispiele quadratischer Gleichungen

- **Der Fall $b = 0$, also $ax^2 + c = 0$**

  Ist der Parameter b gleich 0, so können wir die Lösungsmenge der QG ermitteln.

  Bestimmt $\mathbb{L}$ in den folgenden Beispielen:

  $x^2 - 4 = 0 \qquad \Leftrightarrow$

  $x^2 - 8 = 0 \qquad \Leftrightarrow$

  $36x^2 - 4 = 0 \qquad \Leftrightarrow$

  $7x^2 = 0 \qquad \Leftrightarrow$

  $5x^2 + 2 = 0 \qquad \Rightarrow$

Frage: Wie viele Lösungen hat eine lineare Gleichung?

Frage: Wie steht es mit der Anzahl Lösungen bei einer quadratischen Gleichung?

Weitere Anmerkungen

* $5x^2 + 2 = 0$ hat keine Lösungen, weil $x^2 \geq 0$ ist und somit eben $5x^2 + 2 > 0$.
* Vielleicht habt ihr $x^2 - 4 = 0$ so gelöst:

  $$x^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = \pm 2}}$$

  Das ist bestens und darf durchaus so gemacht werden!
  Ebenso gut funktioniert die Faktorisierung mittels 3. binomischer Formel:

  $$x^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)(x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{\pm 2\}}}$$

  Die Faktorisierung $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ ist **eindeutig**. Es gibt keine alternative Variante. $(x+2)$ und $(x-2)$ nennen wir **Linearfaktoren**, weil es sich um lineare Ausdrücke in x handelt (x kommt maximal in der Potenz x^1 vor). Da ein Produkt aus zwei Faktoren genau dann gleich 0 ist, wenn einer der beiden Faktoren gleich 0 ist, sind wir sicher, dass es genau zwei Lösungen gibt. Entweder ist $x + 2 = 0$ oder eben $x - 2 = 0$. Das sind beides lineare Gleichungen mit je genau einer Lösung.

- **Der Fall $c = 0$, also $ax^2 + bx = 0$**

  Ist der Parameter c gleich 0, so fällt das Lösen der QG ebenfalls leicht. Löst folgende Beispiele:

  $x^2 + x = 0 \quad \Leftrightarrow$

  $3x^2 - x = 0 \quad \Leftrightarrow$

  $5x^2 + 35x = 0 \quad \Leftrightarrow$

  Frage: Was fällt euch bei den Lösungsmengen zu diesen Beispielen auf?

- **Bisher lösbare Fälle mit $b \neq 0$ und $c \neq 0$, also $ax^2 + bx + c = 0$**

  Sind b und c verschieden von 0, so wird das Lösen der QG anspruchsvoller. In einigen Aufgaben sind wir solchen QGs bereits begegnet. Wenn wir Glück hatten (resp. wenn die Aufgabe halt passend gestellt war), konnten wir die Lösungen durch Faktorisierung (binomische Formeln oder Zweiklammeransatz) und anschließender Fallunterscheidung lösen.

  Bestimmt auf diese Weise die Lösungsmengen folgender QGs:

  $x^2 - 6x + 9 = 0 \quad \Leftrightarrow$

  $x^2 + 3x - 40 = 0 \quad \Leftrightarrow$

  $25x^2 + 120x + 144 = 0 \quad \Leftrightarrow$

  $6x^2 - 11x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow$

Frage: Wie sieht es mit der Anzahl Lösungen aus, wenn man die linke Seite mittels der 1. oder der 2. binomischen Formel faktorisieren kann?

- **Bisher nicht lösbare Fälle**

  Eher selten kam es bis anhin vor, dass wir mit einer QG konfrontiert waren, die wir nicht lösen konnten. Es war dann auch schwierig einzuschätzen, ob es gar keine Lösungen gibt oder ob wir einfach nicht in der Lage sind, diese zu finden.

  Hier ein paar Beispiele solcher QGs:

$$x^2 - 10x + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ??$$

$$x^2 + x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ??$$

$$2x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ??$$

$$-x^2 + 8x - 17 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ??$$

D. Zwischenstand und Ausblick

Soweit, so gut. Halten wir fest, was wir bisher gesehen haben:

- Die **Normalform der quadratischen Gleichung** in der Unbekannten x lautet:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{mit} \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad a \neq 0$$

- Ist $b = 0$ oder $c = 0$, so vereinfacht sich die QG drastisch und lässt sich sehr direkt lösen.

  (Im unspektakulären Fall $b = c = 0$, also $ax^2 = 0$, ist die einzige Lösung $x = 0$.)

- Im allgemeinen Fall mit $b \neq 0$ und $c \neq 0$, also $ax^2 + bx + c = 0$, können wir es links mit **Ausklammern**, **binomischen Formeln** oder **Zweiklammeransätzen** probieren und danach Fälle unterscheiden. Es gibt aber keine Garantie, dass dies klappt. Die Parameter müssen "passen".

- Quadratische Gleichungen haben entweder **keine**, **eine** oder **zwei Lösungen**. Das können wir momentan erahnen, haben es aber noch nicht allgemein bewiesen.

Aus diesem aktuellen Wissensstand ergeben sich die folgenden **Zielsetzungen**:

- **Wir wollen jede beliebige QG lösen können!**

  Das bedeutet, wir möchten eine allgemeine Lösung für $ax^2 + bx + c = 0$ herleiten und hoffen jetzt einfach, dass so eine allgemeine Lösung existiert.

- **Wir wollen ein griffiges Kriterium dafür haben, wie viele Lösungen eine QG aufweist!**

  Das heißt, wir möchten möglichst rasch beurteilen können, ob eine QG keine, eine oder zwei Lösungen hat.

Machen wir uns daran diese Zielsetzungen zu erreichen!

E. Quadratische Ergänzung

Auf unserem Weg zur allgemeinen Lösung der quadratischen Gleichung werden wir eine neue mathematische Technik benötigen, die sogenannte **quadratische Ergänzung**. Diese Technik soll nun vorab vorgestellt werden. Dabei dreht sich alles um die 1. (oder die 2.) binomische Formel!

Kennenlernen an Beispielen: In den folgenden Aufgaben steht stets ein Term der Form $x^2 + kx$. Findet nun jeweils die Zahl Q so, dass $x^2 + kx + Q$ der ausmultiplizierten Form einer binomischen Formel entspricht und somit zu $(x+q)^2$ oder $(x-q)^2$ faktorisiert werden kann.

Beispiel: $x^2 + 10x \longrightarrow x^2 + 10x + \underset{Q}{25} = (x + \underset{q}{5})^2$

Die Zahl Q wird als die **quadratische Ergänzung** zu $x^2 + kx$ bezeichnet, denn Q muss jeweils das Quadrat der Zahl q sein.

Und jetzt ihr: $x^2 + 8x \longrightarrow$

$x^2 - 120x \longrightarrow$

$x^2 + 5x \longrightarrow$

$x^2 - 13x \longrightarrow$

$x^2 + \frac{1}{2}x \longrightarrow$

Frage: Welche Rechenoperationen müssen in all diesen Beispielen jeweils ausgeführt werden, um aus der Zahl k die Zahlen q und Q zu erhalten?

Notiert eure Antworten nicht nur in Worten, sondern auch formal: Wie hängen q und Q von k ab?

$q =$ und $Q =$

Nach der Beantwortung dieser Frage solltet ihr in der Lage sein, die folgenden quadratischen Ergänzungen und nachfolgenden Faktorisierungen mit Zahlen und weiteren Parametern vorzunehmen:

$x^2 + mx \longrightarrow$

$x^2 - 8px \longrightarrow$

$x^2 - 2fx \longrightarrow$

$x^2 + \frac{b}{a}x\, s \longrightarrow$

Und was bringt uns diese quadratische Ergänzung eigentlich?

Sie ermöglicht uns ein quadratisches und ein lineares Glied zum Quadrat eines Binoms zusammenzunehmen:

Beispiel: $x^2 + 10x = x^2 + 10x \underbrace{+\,25 - 25}_{=+0} = (x+5)^2 - 25$

Mit dieser quadratischen Ergänzung werden wir es schaffen quadratische Gleichungen zu lösen!

F. Quadratische Gleichungen mittels quadratischer Ergänzung lösen

Ich zeige nun direkt vor, wie sich eine QG mittels quadratischer Ergänzung lösen lässt. Stellt sicher, dass ihr genau versteht, weshalb ich diese Schritte in dieser Reihenfolge ausführe:

$$
\begin{aligned}
& & x^2 - 6x + 3 &= 0 & &\mid -3 \\
&\Leftrightarrow & x^2 - 6x &= -3 & &\mid \text{quadratische Ergänzung } Q = \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9 \text{ addieren} \\
&\Leftrightarrow & x^2 - 6x + 9 &= 6 & &\mid \text{2. binomische Formel anwenden} \\
&\Leftrightarrow & (x-3)^2 &= 6 & &\mid \sqrt{\cdots} \\
&\Leftrightarrow & x - 3 &= \pm\sqrt{6} & &\mid +3 \\
&\Leftrightarrow & \underline{\underline{x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{6}}} & & &
\end{aligned}
$$

Zunächst nehmen wir zur Kenntnis:

- Mit $x_{1/2}$ bringen wir explizit zum Ausdruck, dass hier **zwei Lösungen** auf einmal notiert sind. Ausführlich wäre $x_1 = 3 + \sqrt{6}$ und $x_2 = 3 - \sqrt{6}$ (oder umgekehrt).
- Vor jeder neuen Zeile steht tatsächlich ein **Äquivalenzpfeil**. Beim Wurzelziehen sorgen wir durch Einfügen des $\pm$-Zeichens, dass wir keine Lösung vergessen! $x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{6}$ sind also die einzigen Lösungen der Gleichung $x^2 - 6x + 3 = 0$.
- Wir verstehen nun auch, weshalb wir kaum eine Chance hatten einen Zweiklammeransatz zu finden. Natürlich existiert diese **Faktorisierung in zwei Linearfaktoren**, denn sonst würde es nicht zwei Lösungen geben, aber sie sieht etwas unschön aus:

  $$(x - x_1)(x - x_2) = \Big(x - \big(3 + \sqrt{6}\,\big)\Big)\Big(x - \big(3 - \sqrt{6}\,\big)\Big) = \big(x - 3 - \sqrt{6}\,\big)\big(x - 3 + \sqrt{6}\,\big)$$

  Ich zeige besser kurz, dass dies tatsächlich der Faktorisierung von $x^2 - 6x + 3$ entspricht, indem ich ausmultipliziere und so den anfänglichen Ausdruck zurückerhalte:

  $$\big(x - 3 - \sqrt{6}\,\big)\big(x - 3 + \sqrt{6}\,\big) = (x-3)^2 - \big(\sqrt{6}\,\big)^2 = x^2 - 6x + 9 - 6 = x^2 - 6x + 3$$

  Dank der 3. binomischen Formel geht dieses Ausmultiplizieren zügig und wir sehen, wie unsere quadratische Ergänzung in die Gegenrichtung für das richtige Resultat sorgt.

Löst nun die folgenden QGs durch quadratische Ergänzung:

$x^2 - 2x - 11 = 0$	$x^2 + 7x = -11$	$x^2 + x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$

Frage: Warum gibt es bei der Aufgabe ganz rechts keine Lösungen?

G. Quadratische Gleichungen mit $a \neq 1$

Bis jetzt löst ihr QGs der Form $x^2 + bx + c = 0$. Der Parameter a war also gleich 1! Wir wollen aber den allgemeinsten Fall $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 1$ lösen können. Das ist nicht weiter schwierig. Alles, was es noch zu tun gibt, ist ganz zu Beginn durch a zu dividieren:

$$
\begin{array}{lrl}
\text{Beispiel:} & 2x^2 - 8x + 5 = 0 & \mid :2 \\
\Leftrightarrow & x^2 - 4x + \frac{5}{2} = 0 & \mid -\frac{5}{2} \\
\Leftrightarrow & x^2 - 4x = -\frac{5}{2} & \mid \text{quadratische Ergänzung } Q = 2^2 = 4 \text{ addieren} \\
\Leftrightarrow & x^2 - 4x + 4 = -\frac{5}{2} + 4 & \mid \text{2. binomische Formel links und Addition rechts} \\
\Leftrightarrow & (x-2)^2 = \frac{3}{2} & \mid \sqrt{\cdots} \\
\Leftrightarrow & x - 2 = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} & \mid +2 \\
\Leftrightarrow & \underline{\underline{x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{4 \pm \sqrt{6}}{2}}} &
\end{array}
$$

Und für euch:

$$4x^2 + 6x + 1 = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$3x^2 + 2x = 1$$

$\Leftrightarrow$

$$5x^2 - 3x - \frac{4}{5} = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{4}x^2 = 74 - 5x$$

$\Leftrightarrow$

H. Die Herleitung der Mitternachtsformel

Ihr wisst nun, wie sich quadratische Gleichungen mittels quadratischer Ergänzung grundsätzlich lösen lassen. Macht dies nun für den allgemeinen Fall $ax^2 + bx + c = 0$! Dies führt euch auf die **allgemeine Lösungsformel für quadratische Gleichungen**, die wir in Zukunft einfach als **Mitternachtsformel** bezeichnen werden. Bringt die Lösung auf die Form $x_{1/2} = \frac{C \pm \sqrt{D}}{E}$.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

I. Die Diskriminante $D = b^2 - 4ac$

Ihr habt nun selber die **Mitternachtsformel (MNF)**[1] hergeleitet:

$$\textbf{Mitternachtsformel (MNF):} \qquad ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Hier habe ich einen Folgepfeil anstelle eines Äquivalenzpfeils notiert. Grund dafür ist, dass der Bruchausdruck rechts eventuell gar nicht existiert...

Im Zähler steht unter der Wurzel nämlich die sogenannte **Diskriminante** $D = b^2 - 4ac$, und dieser Ausdruck könnte für bestimmte Werte von a, b und c negativ werden.

$$\textbf{Diskriminante} \qquad D := b^2 - 4ac$$

Soll die Mitternachtsformel ein gültiges Resultat liefern, so muss diese $D \geq 0$ sein, denn ansonsten kann die Wurzel $\sqrt{D} = \sqrt{b^2 - 4ac}$ gar nicht gezogen werden und die Lösungen der MNF sind nicht definiert. Das heißt, wir können nun endgültig darüber Auskunft geben, wann eine quadratische Gleichung wie viele Lösungen hat:

$D > 0$: Die Wurzel kann gezogen werden und wegen dem $\pm$ davor ergeben sich **zwei Lösungen**.

$D = 0$: Die Wurzel davon ergibt ebenfalls 0. Das $\pm$ davor spielt keine Rolle, denn $+0$ ergibt den gleichen Wert wie -0. Somit existiert genau **eine Lösung**.

$D < 0$: Die Wurzel kann nicht gezogen werden und es existiert **keine Lösung**.

Etymologie:[2] Und woher kommt der Name *Diskriminante*? Ganz einfach: Die ursprüngliche Bedeutung des Wortes diskriminieren ist eben "(mehrere Objekte) voneinander unterscheiden" resp. "einen Unterschied machen zwischen (mehreren Objekten)".[3] Unser heutiger Sprachgebrauch macht daraus ein "benachteiligen", ein "schlechter behandeln" oder ein "herabsetzen". Die mathematische Diskriminante erlaubt einfach eine Fallunterscheidung bei QGs: keine Lösung, eine Lösung oder zwei Lösungen.

Untersucht bei den folgenden QGs möglichst speditiv – d.h. mittels Berechnung der Diskriminante – wie viele Lösungen existieren:

$$4x^2 - 8x + 3 = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}x^2 + x + 1 = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$3x^2 + 7x + 4 = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{6}x^2 - 2x + 6 = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$13x^2 + 5x + \frac{1}{2} = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$11x^2 - 10x + \frac{24}{11} = 0 \qquad \Rightarrow$$

[1] Warum gerade Mitternachtsformel? Auf Wikipedia finden wir dazu unter dem Beitrag *Quadratische Gleichung*: "Die Formel wird in Teilen Deutschlands und der Schweiz umgangssprachlich als *Mitternachtsformel* bezeichnet, weil Schüler sie aufsagen können sollen, selbst wenn man sie um Mitternacht weckt und nach der Formel fragt. In Österreich ist der Ausdruck *grosse Lösungsformel* gebräuchlich."

[2] Etymologie = Wortherkunftslehre: Lehre von der Herkunft, Geschichte und Bedeutung der Wörter.

[3] Von lat. *discriminare*: trennen, absondern, unterscheiden.

J. Zusammenfassung zur quadratischen Gleichung

Was im folgenden Merkkasten steht, soll ab sofort zu unserem permanenten, auswendigen, mathematischen Grundwissen gehören!

Allgemeine Definition der quadratischen Gleichung

Jede Gleichung mit einer einzelnen Unbekannten (hier: x), die durch Äquivalenzumformungen auf die sogenannte **Normalform**

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{mit} \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad a \neq 0$$

gebracht werden kann, heißt **quadratische Gleichung**.

Diskriminante $\widehat{=}$ Lösbarkeitskriterium

Alle QGs besitzen keine, eine oder zwei Lösungen $x_{1/2} \in \mathbb{R}$. Wie viele Lösungen im konkreten Fall existieren, wird durch den Wert der **Diskriminante** *D bestimmt:*

$$D := b^2 - 4ac \qquad \begin{array}{lcl} D > 0 & \Leftrightarrow & \text{2 Lösungen} \\ D = 0 & \Leftrightarrow & \text{1 Lösung} \\ D < 0 & \Leftrightarrow & \text{keine Lösung} \end{array}$$

Faktorisierung der Normalform

Existieren zwei Lösungen x_1 und x_2, so lässt sich die linke Seite der Normalform faktorisieren zu:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Fallen die beiden Lösungen zu einer Lösung zusammen, $x_1 = x_2$, so entspricht die linke Seite der Normalform der ausmultiplizierten Seite einer 1. oder 2. binomischen Formel.

Lösungsformel zur QG = Mitternachtsformel (MNF)

Die allgemeine Lösung der QG ist gegeben durch die **Mitternachtsformel***:*

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Lösungsermittlung ohne Mitternachtsformel

Ohne *MNF löst man eine QG mittels* **Ausklammern**, **binomischer Formeln** *oder* **Zweiklammeransatz**. *Jede QG sollten wir zuerst mit diesen Techniken zu lösen versuchen, denn wenn es damit funktioniert, sind wir schneller als mit der MNF!*

Quadratische Ergänzung

Obwohl das **quadratische Ergänzen** *zum Lösen einer konkreten QG kaum benutzt wird, wollen wir uns diese mathematische Technik merken. $x^2 + kx$ soll durch ein passendes konstantes Glied so ergänzt werden, dass daraus eine binomische Formel wird. Aus dieser Forderung ergibt sich die sogenannte* **quadratische Ergänzung** *$\left(\frac{k}{2}\right)^2$ und im Binom taucht als hinterer Summand der Ausdruck $\frac{k}{2}$ auf:*

$$\left(x + \frac{k}{2}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{k}{2} + \left(\frac{k}{2}\right)^2 = x^2 + kx + \frac{k^2}{4}$$