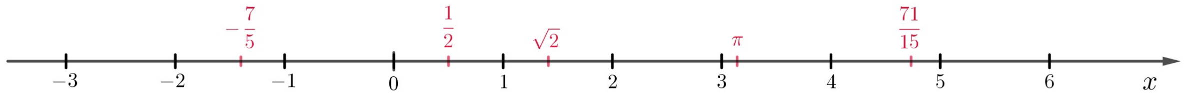
Die Grundmenge $\mathbb{R}$

Unter den **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$ verstehen wir die Menge aller Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$. Alle diese Zahlen lassen sich aneinander reihen und bilden so anschaulich den **reellen Zahlenstrahl**:



Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ füllen diesen Zahlenstrahl **lückenlos** aus! Das bedeutet, zu jeder beliebigen Stelle auf dem Strahl existiert genau eine Zahl $x \in \mathbb{R}$.

Anmerkung: Die Zahlenmenge $\mathbb{R}$ beinhaltet alle ganzen Zahlen, wie -17, 0, 1, 155 oder 1000000, sämtliche rationalen Zahlen (= Brüche aus ganzen Zahlen), wie $\frac{1}{3}$ oder $-\frac{27}{16}$, und ebenso alle irrationalen Zahlen (= Zahlen, die sich nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen schreiben lassen), wie π oder $\sqrt{2}$. Auf diese Zahlenmengen werden wir zu einem späteren Zeitpunkt näher eingehen.

In aller Regel ist $\mathbb{R}$ unsere **Grundmenge**. D.h., wir lassen in unseren Rechnungen allermeistens jede beliebige Zahl zwischen $-\infty$ und $+\infty$ als Werte für unsere Variablen/Unbekannten zu.

Grundoperationen zweier Zahlen

Im bisherigen Mathematikunterricht haben Sie folgende vier **Grundoperationen** kennengelernt, bei denen jeweils **zwei Zahlen** $a, b \in \mathbb{R}$ miteinander verrechnet werden:

Addition $\boldsymbol{a+b}$:

$$\underbrace{\underset{\text{1. Summand}}{2} \quad \underset{\text{"plus"}}{+} \quad \underset{\text{2. Summand}}{7}}_{\text{Summe (unausgerechnet)}} \quad \underset{\text{gleich}}{=} \quad \underset{\text{Summe}}{9}$$

Subtraktion $\boldsymbol{a-b}$:

$$\underbrace{\underset{\text{Minuend}}{8} \quad \underset{\text{"minus"}}{-} \quad \underset{\text{Subtrahend}}{3}}_{\text{Differenz (unausgerechnet)}} \quad \underset{\text{gleich}}{=} \quad \underset{\text{Differenz}}{5}$$

Multiplikation $\boldsymbol{a \cdot b}$:

$$\underbrace{\underset{\text{1. Faktor}}{25} \quad \underset{\text{"mal"}}{\cdot} \quad \underset{\text{2. Faktor}}{16}}_{\text{Produkt (unausgerechnet)}} \quad \underset{\text{gleich}}{=} \quad \underset{\text{Produkt}}{400}$$

Division $\boldsymbol{a : b = \frac{a}{b}}$:

$$\underbrace{\underset{\text{Dividend}}{24} \quad \underset{\text{"geteilt durch"}}{:} \quad \underset{\text{Divisor}}{6}}_{\text{Quotient (unausgerechnet)}} \quad \underset{\text{gleich}}{=} \quad \underset{\text{Quotient}}{4}$$

Tatsächlich brauchen wir nur zwei Grundoperationen. Die Subtraktion lässt sich nämlich als Addition und die Division als Multiplikation auffassen:

- **Subtraktion:** Subtrahiere ich von der Zahl a die Zahl b, so kann dies als Addition von $(-b)$ zur Zahl a verstanden werden:

  $\boldsymbol{a - b = a + (-b)}$ $\qquad$ $(-b)$ heisst das **Negative** oder die **Gegenzahl** von b

  Diese Umdeutung der Subtraktion als Addition funktioniert, weil zu jeder Zahl $b \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Zahl $(-b) \in \mathbb{R}$ existiert:

  $$b = 4 \;\Rightarrow\; (-b) = -4 \qquad b = -\frac{2}{3} \;\Rightarrow\; (-b) = \frac{2}{3} \qquad b = 0 \;\Rightarrow\; (-b) = 0$$

  $a + (-a) = 0$: Die Summe aus einer Zahl und ihrer Gegenzahl ergibt stets 0.

- **Division:** Dividiere ich die Zahl a durch die Zahl b, so kann dies als Multiplikation der Zahl a mit dem Faktor $\frac{1}{b}$ verstanden werden:

  $\boldsymbol{a : b = \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}}$ $\qquad$ $\frac{1}{b}$ heisst der **Kehrwert** von b

  Auch diese Umdeutung funktioniert, weil zu (fast) jeder Zahl $b \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Zahl $\frac{1}{b} \in \mathbb{R}$ existiert:

  $$b = 4 \;\Rightarrow\; \frac{1}{b} = \frac{1}{4} \qquad b = -\frac{2}{3} \;\Rightarrow\; \frac{1}{b} = -\frac{3}{2} \qquad b = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{b} = ?$$

  Dass die Division durch die Zahl 0 verboten ist, entspricht der Tatsache, dass die Zahl 0 als einzige keinen Kehrwert besitzt:

  $$a : 0 = \frac{a}{0} = a \cdot \frac{1}{0} = \text{undefiniert} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{0} \text{ existiert nicht}$$

  $a \cdot \frac{1}{a} = 1$: Das Produkt aus einer Zahl und ihrem Kehrwert ergibt stets 1.

Weitere Zweieroperationen

Natürlich gibt es weitere Operationen, die wir mit zwei Zahlen anstellen können, z.B. die Bildung einer **Potenz**, die Ermittlung des **Durchschnitts**, die Berechnung des **ggT** oder des **kgV**, etc. Diese Operationen lassen sich aber in aller Regel nach einer bestimmten Vorschrift aus Addition(en) und Multiplikation(en) zusammensetzen.

Z.B. werden zur Bildung des Durchschnitts $\oslash$ (= arithmetisches Mittel) die beiden Zahlen zuerst addiert und dann wird diese Summe mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ multipliziert:

$$\oslash = (a+b)\cdot\frac{1}{2} = \frac{a+b}{2}$$

Die beiden fundamentalen Grundoperationen sind also die Addition und die Multiplikation zweier Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$. Ihr Resultat ist stets wieder eine reelle Zahl $c \in \mathbb{R}$.

Anmerkung: In der höheren Mathematik sagt man: "Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bildet zusammen mit den beiden Operationen Addition "+" und Multiplikation "$\cdot$" einen geordneten und vollständigen **Körper**." Damit stehen "unsere" Zahlen auf einem durchdachten und widerspruchsfreien logischen Fundament. Vielleicht gehen wir zu einem späteren Zeitpunkt noch einmal näher darauf ein.

Verknüpfungshierarchie

Bei Berechnungen mit mehr als einer Operation muss geregelt werden, in welcher Reihenfolge die Operationen auszuführen sind. Das lässt sich stets durch **Klammern** festlegen:

$$\Big(\Big(4+\big(3\cdot(2^3)\big)-(3\cdot 4)\Big)-(7\cdot 3)\Big)\cdot 11 = \Big(\Big(4+\big(3\cdot 8\big)-12\Big)-21\Big)\cdot 11$$
$$= \Big(\Big(4+24-12\Big)-21\Big)\cdot 11 = \Big(16-21\Big)\cdot 11 = -5\cdot 11 = -55$$

Mehrfachverknüpfungen können zu Ballungen von Klammern führen. Die folgenden Hierarchieregeln erlauben uns häufig einige dieser Klammern wegzulassen.

Festlegung der Hierarchiestufen

Def.: *$+$ ("plus") und $-$ ("minus") sind Verknüpfungen* **1. Stufe**.
$\cdot$ ("mal") und $:$ ("durch") sind Verknüpfungen **2. Stufe**.
a^b ("hoch") ist eine Verknüpfung **3. Stufe**.

Rechenregeln ohne Klammern ($\approx$ "Punkt vor Strich")

1. *Verknüpfungen höherer Stufen binden enger (= werden zuerst ausgeführt).*
2. *Bei gleicher Stufe rechnen wir von links nach rechts.*

Bsp.: ① $3+2\cdot 4=$ ② $40:(5-7)=$ ③ $3\cdot 2^6+1=$
④ $(4-1)^3=$ ⑤ $64:(8:2)=$ ⑥ $64:8:2=$

Überlegen wir uns, welche Klammern wir im Anfangsbeispiel weglassen dürfen:

$$\Big(\Big(4+\big(3\cdot(2^3)\big)-(3\cdot 4)\Big)-(7\cdot 3)\Big)\cdot 11 =$$