Teiler und Primfaktorzerlegung

Teilbarkeit und Teiler: Wir betrachten zwei natürliche Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$.

Geht die Division $b : a$ ohne Rest auf, so sagen wir: "b ist durch a **teilbar (kurz: tb)**." und "a ist ein **Teiler** von b." Dafür schreiben wir:

$$a \sqsubset b \qquad \text{Bsp.:} \quad 6 \sqsubset 18 \quad \text{aber} \quad 7 \not\sqsubset 18$$

Primzahl: Eine **Primzahl** ist eine natürliche Zahl $p > 1$, die nur durch sich selber und durch 1 teilbar ist.

Primfaktorzerlegung: Schreiben wir eine natürliche Zahl a als Produkt aus lauter Faktoren, die alle Primzahlen sind, so nennen wir dies die **Primfaktorzerlegung** von a.

$$\text{Bsp.:} \quad 600 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$$

Teilermenge: Wenn wir alle Teiler einer natürlichen Zahl a in einer Menge zusammenfassen, so sprechen wir von der **Teilermenge** von a und schreiben dafür T_a.

$$\text{Bsp.:} \quad T_{60} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$$

Frage: Gibt es in einer solchen Teilermenge eine Systematik, die sich gut sichtbar machen lässt?

Antwort: Ja! Mit einem **Teilergraph** lassen sich z.B. alle Teiler einer Zahl logisch anordnen.

Ist 1033 eine Primzahl?

Wie lässt sich eine solche Frage beantworten. Überlegen wir...

i. **Primzahldefinition hervorkramen!** Wäre 1033 eine Primzahl, so dürfte sie nur durch sich selber und durch 1 teilbar sein.

ii. **Simple Idee:** Wir starten bei 2 und versuchen 1033 durch immer grössere Zahlen zu teilen. Wenn wir bei 1032 angelangt sind und keine Division aufgegangen ist, so muss 1033 eine Primzahl sein.

   Kritik 1: Das ist aber sehr aufwendig! Müssen wir wirklich alle Zahlen bis 1032 testen?

iii. **Antwort: Nein!** Betrachten wir zur Veranschaulichung die Teiler der Zahl 100:

Feststellung: Zu jedem Teiler ≥ 10 gehört genau ein Teiler ≤ 10. Die 10 ist die "Mitte" aller Teiler von 100, weil $10 \cdot 10$ wieder 100 ergibt resp. weil $10 = \sqrt{100}$ ist.

Folgerung: Bei 1033 brauchen wir nur bis $\sqrt{1033} \approx 32.14$, also bis zur Zahl 32 zu testen. Denn sollte eine Zahl $a > 32$ ein Teiler von 1033 sein, dann muss es dazu auch eine Zahl $b < 32$ geben, sodass $a \cdot b = 1033$ ist.

Kritik 2: Das ist aber immer noch sehr aufwendig und mühsam! Geht's noch besser?

iv. **Klar!** Wäre beispielsweise 1033 durch 6 teilbar, so hätten wir bereits vorher herausgefunden, dass sie auch durch 2 und durch 3 teilbar ist, denn die Primfaktorzerlegung von 6 lautet $6 = 2 \cdot 3$. Wir brauchen also nur die Teilbarkeit durch die Primzahlen bis 32 zu testen!

Bis 32 sind das 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 und 31.

Tatsächlich lässt sich 1033 durch keine dieser Primzahlen teilen und muss somit selber eine Primzahl sein!

Das Distributivgesetz

Soll ich $28 \cdot 41$ im Kopf ausrechnen, so denke ich Schritt für Schritt:

i. "20 mal 41 ist 820." Das merke ich mir zwischenzeitlich.

ii. "8 mal 41 ist 328."

iii. Nun addiere ich die beiden Zahlen: "820 plus 328 ist 1148".

Dasselbe Konzept wurde bereits in der Primarschule beim "Stöcklirechnen" angewendet:

Was machen wir hier eigentlich? Wir wenden das sogenannte **Distributivgesetz** an!

Das Distributivgesetz

Für beliebige drei Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt stets:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Bsp: ① $7 \cdot 46 =$

② $29 \cdot 64 =$

③ $7 \cdot 53 + 13 \cdot 53 =$

Bem.: Eine direkte Folgerung aus dem Distributivgesetz lautet:

Sind zwei Zahlen a, b durch eine Zahl n teilbar, so gilt das auch für ihre Summe!

Elementare Teilbarkeitsregeln

Die folgenden **Teilbarkeitsregeln** wollen wir stets **auswendig präsent** haben (Grundwissen!):

2: Alle **geraden Zahlen** sind durch 2 teilbar, alle ungeraden nicht.

3: Eine Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre **Quersumme (QS)** durch 3 teilbar ist.

Bsp.: $72\,468 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{QS} = 7+2+4+6+8 = 27 \quad \Rightarrow$ durch 3 teilbar!

4: Eine Zahl ist genau dann durch 4 teilbar, wenn die aus den letzten beiden Ziffern gebildete Zahl durch 4 teilbar ist.

Bsp.: $643\,376 \quad \Rightarrow$ Zahl aus den letzten beiden Ziffern $= 76 \quad \Rightarrow$ durch 4 teilbar!

5: Eine Zahl ist genau dann durch 5 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer 0 oder 5 lautet.

6: Eine Zahl ist genau dann durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 **und** durch 3 teilbar ist.

8: Eine Zahl ist genau dann durch 8 teilbar, wenn die aus den letzten drei Ziffern gebildete Zahl durch 8 teilbar ist.

Bsp.: $539\,160 \quad \Rightarrow$ Zahl aus den letzten drei Ziffern $= 160 \quad \Rightarrow$ durch 8 teilbar!

9: Eine Zahl ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre **Quersumme (QS)** durch 9 teilbar ist.

Bsp.: $857\,331 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{QS} = 8+5+7+3+3+1 = 27 \quad \Rightarrow$ durch 9 teilbar!

10: Eine Zahl ist genau dann durch 10 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer eine 0 ist.

11: Eine Zahl ist genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre **alternierende Quersumme (AQS)** durch 11 teilbar ist.

Bsp.: $56\,822\,491 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{AQS} = 5-6+8-2+2-4+9-1 = 11 \quad \Rightarrow$ durch 11 teilbar!

Für die Zahlen 7 und 13 gibt es eine gemeinsame Teilbarkeitsregel, die allerdings deutlich komplizierter ist und die wir im Moment gerade nicht weiter verfolgen wollen.

Frage: Und woher kommen eigentlich diese Teilbarkeitsregeln?

Antwort: Sie lassen sich auf das **Distributivgesetz** zurückführen!

Numerischer Beweis der Teilbarkeitsregel für die Zahl 4

Zunächst bemerken wir, dass alle Vielfachen von 100 durch 4 teilbar sind, denn: $100 = 4 \cdot 25$:

Bsp.: $643\,300 = 100 \cdot 6433 = 4 \cdot 25 \cdot 6433$ ist durch 4 teilbar!

Damit können wir die 4er-Teilbarkeitsregel am Beispiel von oben nachvollziehen:

Distributivgesetz: Sind beide Summanden durch 4 teilbar, so ist auch ihre Summe durch 4 teilbar!

Und weiter: Ist einer der beiden Summanden durch 4 teilbar, dann muss auch der andere durch 4 teilbar sein, damit ihre Summe ebenfalls durch 4 teilbar ist, denn ansonsten lässt sich der Faktor 4 nicht ausklammern.

Somit folgt oben: Eine Zahl ist genau dann durch 4 teilbar, wenn die aus den letzten beiden Ziffern gebildete Zahl durch 4 teilbar ist.

Numerischer Beweis der Teilbarkeitsregel für die Zahl 3

Zunächst bemerken wir etwas Erstaunliches:

$60 - 6 = 54$ ist durch 3 teilbar

$400 - 4 = 396$ ist durch 3 teilbar

$2000 - 2 = 1998$ ist durch 3 teilbar

$70\,000 - 7 = 69\,993$ ist durch 3 teilbar

Grund für diese 3er-Teilbarkeiten ist, dass 9, 99, 999, 9999, etc. klar durch 3 teilbar sind:

Bsp.: $70\,000 - 7 = 7 \cdot (10\,000 - 1) = 7 \cdot 9999$ ist durch 3 teilbar

Damit lässt sich die 3er-Teilbarkeitsregel am Beispiel nachvollziehen:

Distributivgesetz: Sind beide Summanden durch 3 teilbar, so ist auch ihre Summe durch 3 teilbar!

Und weiter: Ist einer der beiden Summanden durch 3 teilbar, dann muss auch der andere durch 3 teilbar sein, damit ihre Summe ebenfalls durch 3 teilbar ist, denn ansonsten lässt sich der Faktor 3 nicht ausklammern!

Somit folgt oben: Eine Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme (QS) durch 3 teilbar ist.

Für die weiteren Teilbarkeitsregeln lassen sich in ähnlicher Weise Überlegungen anstellen.