Kleine Terminologie (= Begriffserklärung) zum algebraischen Rechnen

- In der Algebra rechnen wir mit Buchstaben, die stets als **"Platzhalter" für Zahlen** zu verstehen sind. Je nach Art der Betrachtung bezeichnen wir die Buchstaben in einem algebraischen Ausdruck als **Variable**, **Unbekannte**, **Parameter**, etc.

  Die inhaltlichen Unterschiede zwischen derartigen Bezeichnungen werden wir nach und nach immer besser verstehen. Im Moment sprechen wir generell von **Variablen**.

- Einen kleineren oder größeren, logisch zusammen gehörenden, algebraischen Ausdruck aus Zahlen, Variablen und Verknüpfungen bezeichnen wir als **Term**.

  Bsp.: $(-7x) \cdot 5ky \;,\quad 3x - 1 \;,\quad \dfrac{2x}{3} + bx \;,\quad a^{x^2-1} + 2x - 7 \;,$ etc.

  Die einzelnen Summanden (und Subtrahenden) eines Terms bezeichnen wir als dessen **Glieder**.

- Ein Term, der nur aus einem Summanden besteht, heißt **Monom**, einer mit zwei Summanden **Binom** und bei drei Summanden können wir von einem **Trinom** sprechen. Diese Begriffe werden wir eher selten benutzen – kennen wollen wir sie aber.

  Bsp.: $-4x \;\rightarrow$ Monom $\qquad 3a - 2b \;\rightarrow$ Binom $\qquad 2x^2 - 3x + 7 \;\rightarrow$ Trinom

  Für Terme mit noch mehr Gliedern verwenden wir keine spezifischen Begriffe.

- Zwei Terme heissen **äquivalent**, wenn wir beim Einsetzen beliebiger Zahlen für die darin enthaltenen Buchstaben aus beiden Termen denselben Wert erhalten.

  Bsp.: $4(x - 3b)$ und $4x - 12b$ sind äquivalente Terme

  Eine **Termumformung** soll stets auf einen äquivalenten Term führen. Sie muss also eine **Äquivalenzumformung** sein. Genau dann schreiben wir beim Umformen ein **Gleichheitszeichen** zwischen die beiden Terme:

  im obigen Bsp.: $4(x - 3b) = 4x - 12b$

- Mehrere Äquivalenzumformungen, namentlich das **Ausmultiplizieren**, das **Zusammenfassen** und das **Faktorisieren**, bilden die Grundlage unseres algebraischen Rechnens. Wir wollen uns zuerst gründlich mit den ersten beiden auseinandersetzen.

Vorgehensweise beim Faktorisieren

Bsp.: $3x^2 + 12x + 12 =$

$8b - 18a^6b =$

$5x^2 - 5x - 30 =$

Was sollte man versuchen?

1. Gemeinsame Faktoren ausklammern.
2. Binomische Formeln benutzen.
3. letzte Möglichkeit: Zweiklammeransatz.
   (resp. allg.: einen Faktor der Form $(a \pm b)$ ausklammern).

Die Ausführung des Zweiklammeransatzes

Ziel ist die Faktorisierung eines quadratischen Ausdrucks der Form $ax^2 + bx + c$ in zwei sogenannte **Linearfaktoren**, also in ein Produkt aus zwei Klammern: $(sx \pm t)(ux \pm v)$ Klammern.

Bsp. $x^2 - 11x - 42 = (x + 3)(x - 14)$ oder $2x^2 + 5x - 12 = (2x - 3)(x + 4)$

Wir betrachten zuerst die einfacheren Fälle mit $a = s = u = 1$, d.h. $x^2 + bx + c = (x \pm t)(x \pm v)$.

Drei Schritte

i. Vorzeichen betrachten

Fall 1: Konstantes Glied ist positiv $\Rightarrow$ die Vorzeichen in beiden Klammern sind gleich dem Vorzeichen des linearen Gliedes!

$x^2 + 7x + 12 = (x + \ldots)(x + \ldots)$ $\qquad$ $x^2 - 7x + 12 = (x - \ldots)(x - \ldots)$

Fall 2: Konstantes Glied ist negativ $\Rightarrow$ in den Linearfaktoren treten verschiedene Vorzeichen auf!

$x^2 + 4x - 12 = (x + \ldots)(x - \ldots)$ $\qquad$ $x^2 - 4x - 12 = (x + \ldots)(x - \ldots)$

ii. Mögliche Faktorisierungen des konstanten Gliedes vergegenwärtigen

Das konstante Glied, hier die Zahl 12, kann auf drei Arten in zwei Faktoren aufgeteilt werden:

$$12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$$

iii. Passende Faktorisierung herausfinden

Wir überlegen, welche dieser Faktorisierungen so in die Klammern gelegt werden kann, dass beim distributiven Ausmultiplizieren das korrekte lineare Glied entsteht.

Z.B. muss beim letzten Beispiel oben eine -4 als Differenz der beiden Faktoren entstehen. Das geht nur mit $+2$ und -6. Die richtige Zweiklammerfaktorisierung lautet also:

$$x^2 - 4x - 12 = (x + 2)(x - 6)$$