

Eine Reihe lehrreicher Beispiele

i. $9 = 13 - x$

ii. $4x - 9 = 11$

Gleichungen mit einer **Unbekannten**, z.B. x , sind *Suchformen*: Es werden alle Zahlen x gesucht, durch die die Gleichung **wahr** wird. Die Menge all dieser x heißt **Lösungsmenge** \mathbb{L} der Gleichung.

Zwei Gleichungen heißen **äquivalent** oder **gleichwertig**, wenn sie die gleiche Lösungsmenge \mathbb{L} besitzen; zwischen zwei solchen Gleichungen notieren wir einen **Äquivalenzpfeil** " \Leftrightarrow ". Diese Notation wollen wir uns von Anfang an angewöhnen!

iii. $15x - 9 = 4x + 90$

iv. $16x - (5x + 22) = 0$

Beim **Umformen** wenden wir auf beide Seiten der Gleichung die **gleiche (!)** Operation an. Damit sorgen wir in der Regel auch gerade dafür, dass die neue Gleichung äquivalent zur alten ist. Es wird später allerdings **Ausnahmen** geben, derer wir uns bewusst werden müssen!

Rep.: $2x^2 - 5x - 12$ besteht aus drei Gliedern, die sich nicht weiter zusammenfassen lassen.

Wir machen drei verschiedene *Qualitäten* aus:

$2x^2$ ist das **quadratische** Glied, weil es die Potenz x^2 enthält,

$-5x$ ist das **lineare** Glied, weil es die Potenz $x^1 = x$ enthält, und

-12 ist das **konstante** Glied, weil es die Potenz $x^0 = 1$ enthält.

Nur Glieder gleicher Qualität können zusammengefasst werden!

Führen Sie die Begriffe **quadratisch**, **linear** und **konstant** ab sofort in Ihrem mathematischen Vokabular! Sie sind fundamental wichtig!

N.B.: Ein Glied mit x^3 nennt man **kubisch**. Das dürfen Sie sich ebenfalls merken.

Lineare Gleichungen

Jede Gleichung mit der Unbekannten x , die durch Äquivalenzumformungen auf die Form

$$ax = b \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R} \quad \text{und } a \neq 0$$

gebracht werden kann, bezeichnen wir als **lineare Gleichung**. Diese Gleichung ist *linear*, weil die höchste Potenz, mit der die Unbekannte x in ihr auftritt, eben x^1 ist.

Natürlich kennen wir die Lösung, sobald die lineare Gleichung auf die Form $ax = b$ gebracht wurde:

$$ax = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{b}{a}$$

Das bedeutet: **Lineare Gleichungen haben genau eine Lösung!**

Provisorisches Rezept zur Lösung linearer Gleichungen

- ① Alle **Klammern auflösen**.
- ② **Separieren**: alle Terme mit x auf eine Seite, alle anderen auf die andere.
- ③ Auf beiden Seiten **zusammenfassen**.
- ④ Durch den Faktor bei x **teilen**, danach allenfalls **kürzen**.

Beispiele linearer Gleichungen

v.	$4(x - 3) = 3(x - 2)$	vi.	$5(x + 9) - (17 - 2x) = 0$
vii.	$15(x - 22) - 3(5x - 24) = 0$	viii.	$105(1 - x) = -100(3 - x)$
ix.	$4(x - 1) - 3(1 - x) = 14$	x.	$3(x - 3) + 7(2x + 6) = 33$
xi.	$5(2x - 1) - 7(1 - 2x) = 18 + 24x$	xii.	$4(4x - 2) - 17(1 - 2x) = 175$

Bemerkungen bis hierhin

- Alle gefundenen Resultate lassen sich jeweils in die ursprüngliche Gleichung zurück einsetzen. Wir nennen dies eine **Kontrolle**. Ein richtiges Resultat muss bei der Kontrolle die Gleichung erfüllen, also eine wahre Aussage ergeben.

Auch wenn das jetzt vielleicht noch nicht der Fall ist, später werden sich Kontrollen immer mal wieder sehr lohnen.

- Bis hierhin hatten wir mit unseren Umformungen noch keine Probleme. Wir haben Zahlen auf beiden Gleichungsseiten addiert oder subtrahiert, sowie beide Gleichungsseiten mit Zahlen multipliziert und durch sie dividiert. Diese vier Grundoperationen sind offensichtlich **Äquivalenzumformungen**. Wir werden damit nie ein Problem bekommen.

Weitere Beispiele

In den folgenden Beispielen bekommen Sie zu sehen, dass sich auch hinter anfänglich quadratisch anmutenden Gleichungen lineare Gleichungen verstecken können – nämlich genau dann, wenn sich alle quadratischen Glieder wegstreichen lassen (d.h. sie können weg subtrahiert oder addiert werden).

xiii.	$(x - 5)(x - 2) = (x - 4)(x + 3)$
xiv.	$(x - 5)(x - 2) = (x - 3)(x - 4) - 2$
xv.	$(x + 1)(x + 7) = (x + 2)(x + 3)$
xvi.	$x(x + 4) = (x - 1)(x + 6)$
xvii.	$(3x - 1)(x + 3) = (x + 2)(3x + 2)$
xviii.	$(x + 8)(x - 3) = (x - 1)^2$
ixx.	$(x - 1)(x + 1) = (x - 2)(x + 3)$
xx.	$(x + 2)^2 = x(x + 5)$