Potenzen von Binomen

Rep. 1: Ein **Binom** ist ein Ausdruck der Form $a + b$ resp. $a - b$.

Rep. 2: Die **Binomischen Formeln** erhalten wir durch distributives Ausmultiplizieren. Jedes Glied des ersten Binoms wird mit jedem Glied des zweiten Binoms multipliziert; danach addieren wir alle diese Produkte. Betrachten wir dazu nochmals die Herleitung der ersten binomischen Formel:

$$(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Woher kommt der Vorfaktor $\mathbf{2}$ im Doppelprodukt $\boldsymbol{2ab}$?

Antwort: Beim distributiven Ausmultiplizieren oben gibt es genau zwei **Kombinationsmöglichkeiten**, wie ein gemischtes Glied ab entstehen kann:

- Entweder wird das a aus dem ersten Binom mit dem b aus dem zweiten Binom multipliziert,
- oder es wird das b aus dem ersten Binom mit dem a aus dem zweiten Binom multipliziert.

Dieser Gedanke passt auch zum Rest unserer binomischen Formel: Es gibt nur eine Möglichkeit, wie a^2 kombiniert werden kann, nämlich indem das a aus dem ersten Binom mit dem a aus dem zweiten Binom multipliziert wird! Gleiches gilt für die Entstehung von b^2.

Was folgern wir für $\boldsymbol{(a+b)^3 = (a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b)}$?

Es entstehen Qualitäten a^3, a^2b, ab^2 und b^3. Wie viele Kombinationsmöglichkeiten gibt es jeweils?

- Für a^3 gibt es nur eine Möglichkeit, denn dafür muss aus jedem Binom das a verwendet werden:

- Für a^2b gibt es drei Möglichkeiten:

Für ab^2 und b^3 können vergleichbare Überlegungen angestellt werden, sodass insgesamt folgen sollte:

$(a+b)^3 =$

Überprüfen wir dieses Resultat durch konkretes Ausmultiplizieren:

$(a+b)^3 = (a+b) \cdot (a+b)^2 =$

Unser Resultat von vorhin stimmt offensichtlich! Weiter gilt für $(a-b)^3$:

Positive und negative Glieder wechseln sich ab!

Wie lautet die ausmultiplizierte Form von $(a+b)^4 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$?

Jedes Glied, das beim Ausmultiplizieren entsteht, enthält aus jeder der vier Klammern entweder einen Faktor a oder einen Faktor b. Es besteht also aus vier Faktoren, woraus wir auf die fünf möglichen Qualitäten schließen:

$$a^4\,(=a^4b^0) \qquad a^3b\,(=a^3b^1) \qquad a^2b^2 \qquad ab^3\,(=a^1b^3) \qquad b^4\,(=a^0b^4)$$

Überlegen wir uns, wie viele Kombinationsmöglichkeiten es für die verschiedenen Qualitäten gibt:

- $\boldsymbol{a^4}$:
- $\boldsymbol{a^3b}$:
- $\boldsymbol{a^2b^2}$:

ab^3 ist vergleichbar mit a^3b und b^4 mit a^4. Die komplett ausmultiplizierte Form sollte also lauten:

$$(a+b)^4 =$$

Tatsächlich lässt sich dieses Resultat durch konkretes Ausmultiplizieren bestätigen:

$$(a+b)^4 =$$

Wiederum wechseln sich bei $(a-b)^4$ positive und negative Glieder ab:

$$(a-b)^4 =$$

Wohin führt uns das alles?

Hier unsere bisherigen Resultate in einer speziellen Anordnung. Dabei habe ich die Potenzen $(a \pm b)^0$, $(a \pm b)^1$ und $(a \pm b)^5$ hinzugefügt:

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
(a \pm b)^0 = & & & & & & 1 & & & & & \\
(a \pm b)^1 = & & & & & a & \pm & b & & & & \\
(a \pm b)^2 = & & & & a^2 & \pm & 2ab & + & b^2 & & & \\
(a \pm b)^3 = & & & a^3 & \pm & 3a^2b & + & 3ab^2 & \pm & b^3 & & \\
(a \pm b)^4 = & & a^4 & \pm & 4a^3b & + & 6a^2b^2 & \pm & 4ab^3 & + & b^4 & \\
(a \pm b)^5 = & a^5 \;\pm\; 5a^4b & & + & 10a^3b^2 & & \pm & & 10a^2b^3 & + & 5ab^4 & \pm\; b^5 \\
(a \pm b)^6 = & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

Wir bemerken:

- Bei $(a-b)^n$ wechseln die Vorzeichen der Glieder ab (stets beginnend mit $+a^n$).
- In jedem Glied von $(a \pm b)^n$ ergeben die Exponenten von a und b zusammen n.
- Die Zahlen bei den einzelnen Gliedern nennen wir **Vorfaktoren** oder **Koeffizienten**. Sie folgen einer speziellen Bildungsregel, die oben sichtbar wird. Es geht um...

Das Pascal'sche Dreieck

0. Zeile:

1. Zeile:

2. Zeile:

3. Zeile:

4. Zeile:

5. Zeile:

6. Zeile:

7. Zeile:

8. Zeile:

In der n-ten Zeile stehen die Koeffizienten, die bei der Ausmultiplizierung der n-ten Potenz des Binoms $(a+b)$ vor den einzelnen Gliedern zu stehen kommen. Man bezeichnet die Zahlen im Pascal'schen Dreieck deshalb als **Binomialkoeffizienten**.

Beispiele zum Ausmultiplizieren von Binompotenzen

$(c+d)^5 =$

$(f-g)^7 =$

$(x^2+y)^6 =$

$(2u-v)^3 =$

$(r+3s)^4 =$

$(p^2+2q)^5 =$

$(2x^4+3y)^4 =$

Schließlich leiten wir her...

Kuben-Formeln

$(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2) =$

$(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2) =$

Trinomische Formel

$(a+b+c)^2 =$

Beispiele zum Ausmultiplizieren

$(3e+2f+11)^2 =$

$(a+b-c)^2 =$

$(a+b+c)(a+b-c) =$

$(3f-g)(9f^2+3fg+g^2) =$

$(5a^2+b)(25a^4-5a^2b+b^2) =$

$(p+3q)(p^2-6pq+9q^2) =$

$(x+3y)(x^2+3xy+9y^2) =$

Beispiele zum Faktorisieren

$8-27s^3 =$

$f^6+216g^3 =$

$a^6-b^6 =$

$98x^2+18y^2-8z^2-84xy =$

$a^5b^6c-a^8b^3c^7 =$

$1024u^6+686v^9 =$