SERIE XI.B: Quadratische Gleichungen – Teil B

Klasse 155c / AGe

1. (a) Von zwei Zahlen ist die eine um 50 grösser als die andere und das Produkt um 50 grösser als die Summe. Bestimme die beiden Zahlen.
   (b) Das Produkt der beiden kleinsten von sechs aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist dreimal so gross wie die Summe der vier übrigen Zahlen. Wie lautet die kleinste der sechs Zahlen?
   (c) Das um 100 verminderte Quadrat einer gesuchten Zahl übertrifft die Zahl 200 um so viel, wie die gesuchte Zahl selber unter 300 liegt.
   (d) Welche Zahlen unterscheiden sich um $\frac{6}{25}$ von ihrer Quadratwurzel?

2. Für welche Werte der Parameter $a, b, c \in \mathbb{R}$ besitzen die folgenden Gleichungen eine oder zwei Lösungen? Wie lauten diese Lösungen jeweils?

   (a) $x^2 + x + a = 0$ (b) $4x^2 + bx + 1 = 0$ (c) $2x^2 + 5ax + 3a^2 = 0$
   (d) $ax^2 + 6x - 2 = 0$ (e) $cx^2 - (2c + 1)x + 1 = 0$ (f) $ax^2 - 2ax + a + 1 = 0$

3. Faktorisiere, d.h., bringe auf die Form $a(x-x_1)(x-x_2)$, falls dies möglich ist. Versuche dabei möglichst effizient vorzugehen (MNF = ultima ratio):

   (a) $x^2 + 5x - 24$ (b) $2x^2 + 7x - 4$ (c) $\dfrac{1}{100}x^2 - \dfrac{9}{10}x - 10$
   (d) $4x^2 - 24x + 35$ (e) $7x^2 + \dfrac{41}{3}x + 6$ (f) $3x^2 - bx + \dfrac{1}{4}b^2$

4. Löse mit Hilfe einer geeigneten **Substitution**:

   (a) $(x - 10)^2 - 8(x - 10) + 15 = 0$ (b) $(2x + 1)^2 + 7(2x + 1) - 18 = 0$
   (c) $\left(\dfrac{1}{2}x - 2\right)^2 - 7\left(\dfrac{1}{2}x - 2\right) + 10 = 0$ (d) $(2x - 5)^2 - \dfrac{2x - 5}{3} - 8 = 0$
   (e) $3\tan^2(\alpha) - 4\sqrt{3}\,\tan(\alpha) + 3 = 0$ (f) $2\sin^2(\alpha) - 9\sin(\alpha) + 4 = 0$

5. **Zusatzaufgabe:** In vielen Lehrbüchern findet man zum Thema quadratische Gleichungen den sogenannten **Satz von Vieta**. Er lautet:

   Satz (von Vieta): *Sind x_1 und x_2 die Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$, so gelten die beiden Beziehungen:*

   $$-\frac{b}{a} = x_1 + x_2 \qquad \textit{und} \qquad \frac{c}{a} = x_1 x_2$$

   (a) Beweise den Satz von Vieta.
   (b) Überlege dir, wofür man den Satz von Vieta allenfalls brauchen könnte.
   (c) Bestimme jeweils den Parameterwert u und die Lösung x_2:

   i. $x^2 + 4x + u = 0\,, \quad x_1 = 7$ ii. $12x^2 - 17x + u = 0\,, \quad x_1 = \dfrac{2}{3}$
   iii. $ux^2 + 59x + 70 = 0\,, \quad x_1 = -2$ iv. $4x^2 + ux + 45 = 0\,, \quad x_1 = \dfrac{9}{2}$