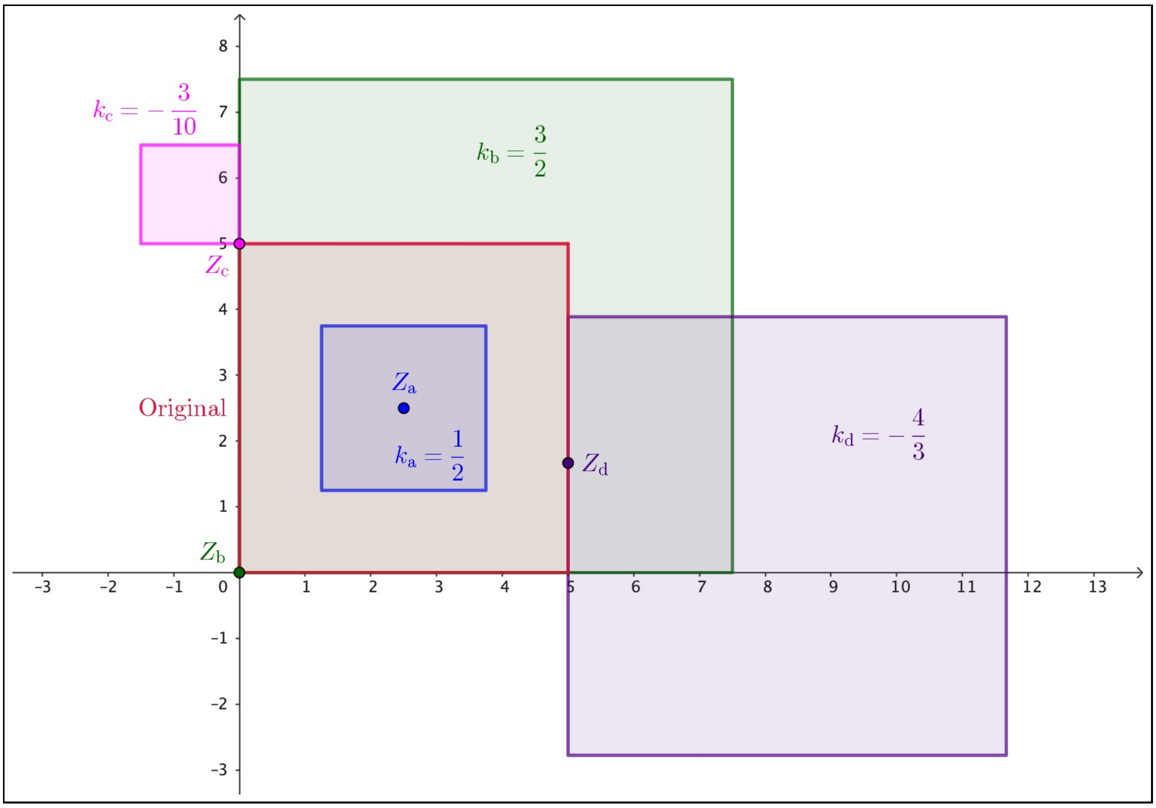
Geometrie – Lösungen zu Übungsserie 1

1. In GeoGebra ergibt sich z.B. die folgende Grafik:



2. (a) Eine Verschiebung ist im Allgemeinen keine zentrische Streckung, obwohl es Ausnahmen geben kann bei Verschiebungen sehr symmetrischer Figuren wie gleichseitige Dreiecke, Quadrate oder natürlich Kreise. Der Streckfaktor wäre dann $k = -1$, weil nur so eine Veränderung des Ortes ohne Veränderung der Grösse bewirkt werden kann. (Tatsächlich kann jede Kreisverschiebung als zentrische Streckung interpretiert werden.)
   (b) Jede Punktspiegelung ist eine zentrische Streckung mit Streckfaktor $k = -1$.
   (c) Die Achsenspiegelung ist im Allgemeinen keine zentrische Streckung, wobei erneut die Anmerkungen unter (a) angeführt werden können.
   (d) Dito: Auch eine Drehung um $90°$ ist im Allgemeinen keine zentrische Streckung.

3. Das Streckzentrum befindet sich beim Berührungspunkt beider Kreise. Der Durchmesser des Originals entspricht dem Radius des Bildes. Somit ist $k = 2$.

   Für die Bildfläche folgt: $A' = k^2 \cdot A = 2^2 \cdot A = 4A$. Das Verhältnis der beiden Kreisfläche ist also $A' : A = 4 : 1$.

4. Interpretieren wir das kleine Dreieck als Bild des grossen Dreiecks, so folgt:

$$A' = 36\,\% \cdot A = \frac{36}{100} \cdot A \overset{!}{=} k^2 \cdot A \quad \Rightarrow \quad k^2 = \frac{36}{100} \quad \text{resp.} \quad k = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

   Somit beträgt $x = \frac{3}{5} \cdot 5\,\text{cm} = 3\,\text{cm}$.

5. Ein Kartenmaßstab bezieht sich stets auf Längen und entspricht somit direkt dem Vergrösserungs- resp. Verkleinerungsfaktor k. Der Quadratzentimeter auf der Karte ist mit $k = 50\,000$ zu vergrössern, um die reale Fläche zu erhalten. Daraus folgt:

$$A' = k^2 \cdot A = 50\,000^2 \cdot 1\,\text{cm}^2 = 2\,500\,000\,000 \cdot \frac{1}{10\,000}\,\text{m}^2 = 250\,000\,\text{m}^2$$
$$= 250\,000 \cdot \frac{1}{1\,000\,000}\,\text{km}^2 = \underline{\underline{0.25\,\text{km}^2}}$$

6. (a) Flächen vergrössern sich bei zentrischer Streckung mit dem Faktor $k^2 = 3^2 = 9$. Das gilt auch für die Würfeloberfläche.

   Volumen vergrössern sich bei zentrischer Streckung mit dem Faktor $k^3 = 3^3 = 27$. Das gilt auch für das Würfelvolumen.

   (b) Analog zu (a): Die Kugeloberfläche wird mit dem Faktor $k^2 = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ verkleinert, das Kugelvolumen verkleinert sich mit dem Faktor $k^3 = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$.

7. Bei der Vergrösserung von A4 zu A3 gilt für die Fläche:

$$A' = k^2 \cdot A = 2 \cdot A \equiv k^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad k = \sqrt{2} \approx 1.414 \approx 141\,\%$$

   Analog erhalten wir bei der Verkleinerung von A4 auf A5:

$$A' = k^2 \cdot A = \frac{1}{2} \cdot A \equiv k^2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707 \approx 71\,\%$$

   Damit sind die Kopiereinstellungen geklärt.

   Für das Seitenverhältnis “Länge:Breite” können wir uns anhand der Grafik und mit obigem Resultat überlegen:

$$\text{Länge eines A4-Blattes} = \text{Breite eines A3-Blattes} \stackrel{!}{=} \sqrt{2} \cdot \text{Breite eines A4-Blattes}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\text{Länge}}{\text{Breite}} = \sqrt{2} \quad \text{also:} \quad \underline{\underline{l : b = \sqrt{2} : 1}} \quad \text{(für alle DIN-Papierformate)}$$