Geometrie – Lösungen zu Übungsserie II

1. Ähnlich sind...
   - die Quadrate A und J,
   - die Kreise B, I und Q,
   - die Rechtecke C und F (das Rechteck T hat andere Proportionen!),
   - die großen G's D, L und S (aber nicht R!),
   - die Parallelogramme E und G (aber nicht der Rhombus M) und
   - die gleichschenkligen Dreiecke H, K und O (aber nicht das Dreieck N).

2. Der Keil selber ist ein Dreieck. Dabei ist das Seitenverhältnis von stehender zu liegender Seite $1 : 5$. Der Anteil des Keils, der sich zwischen den beiden Platten befindet, entspricht einem dazu ähnlichen Dreieck. Dort ist das selbe Seitenverhältnis gegeben durch $d : 3.7$. Somit folgt:

$$\frac{1}{5} = \frac{d}{3.7} \quad \Leftrightarrow \quad 3.7 = 5d \quad \Leftrightarrow \quad d = \frac{3.7}{5} = 0.74$$

   Der Plattenabstand beträgt also $\underline{\underline{0.74\,\mathrm{cm}}}$ resp. $\underline{\underline{7.4\,\mathrm{mm}}}$.

3. (a) Mit dem Satz des Pythagoras erhalten wir für die liegende Kathete des kleineren Dreiecks:

$$\sqrt{45^2 - 27^2} = \sqrt{9^2(5^2 - 3^2)} = \sqrt{9^2(25 - 9)} = \sqrt{9^2 \cdot 4^2} = 9 \cdot 4 = 36$$

   Aus dem 2. Strahlensatz folgt daraus für die liegende Seite des großen Dreiecks (Streckfaktor $\frac{36}{27} = \frac{4}{3}$):

$$k = 36 \cdot \frac{4}{3} = 48$$

   Somit ergibt sich für die gesuchte Strecke: $x = 48 - 36 = \underline{\underline{12}}$.

   (b) Die obere, lange Kathete des kleineren Dreiecks ergibt sich zu $120 - 48 = 72$.
   Somit beträgt der Streckfaktor von kleinem zu großem Dreieck $k = \frac{120}{72} = \frac{5}{3}$.
   Die stehende Seite des großen Dreiecks hat somit die Länge:

$$30 \cdot \frac{5}{3} = 50$$

   Nun ergibt sich mit der Flächenformel für das Trapez die gesuchte Fläche:

$$A = \frac{30 + 50}{2} \cdot 48 = 40 \cdot 48 = \underline{\underline{1920}}$$

4. Aus den Strecken $\overline{SF}$, $\overline{FC}$ und $\overline{ED}$ schließen wir mittels 2. Strahlensatz auf die Strecke $\overline{AB}$:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{SF} + \overline{FC}}{\overline{SF}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{AB}}{2.4} = \frac{3.9 + 5.2}{3.9} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{AB} = \frac{9.1 \cdot 2.4}{3.9} = \frac{91 \cdot 2.4}{39} = 7 \cdot 0.8 = \underline{\underline{5.6}}$$

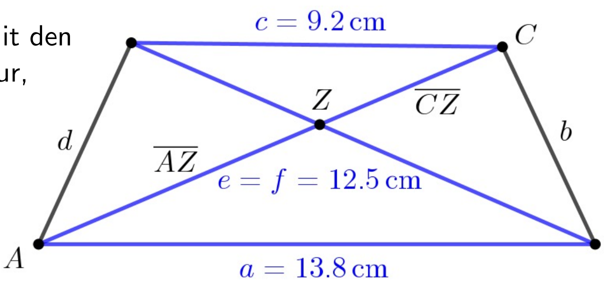
   Ebenso schließen wir aus $\overline{SF}$, $\overline{FC}$ und $\overline{SB}$ mittels 1. Strahlensatz auf die Strecke $\overline{SE}$:

$$\frac{\overline{SE}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SF}}{\overline{SF} + \overline{FC}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{SE}}{7} = \frac{3.9}{3.9 + 5.2} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{SE} = \frac{3.9 \cdot 7}{9.1} = \frac{39 \cdot 7}{91} = \underline{\underline{3}}$$

   Mit $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = 5.6 + 2.8 = 8.4$ folgt aus $k = \frac{\overline{SH}}{\overline{SB}} = \frac{5}{7}$ für die gesuchte Strecke $\overline{GI}$:

$$\overline{GI} = k \cdot \overline{AC} = \frac{5}{7} \cdot 8.4 = 5 \cdot 1.2 = \underline{\underline{6}}$$

5. Die beiden Diagonalen e und f bilden zusammen mit den parallelen Seiten a und c gerade die Strahlensatzfigur, bei die Parallelen auf verschiedenen Seiten des Zentrums Z (= Diagonalenschnittpunkt) liegen. Mit dem 2. Strahlensatz folgt sofort:



$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{CZ}} = \frac{a}{c} = \frac{13.8}{9.2} = \frac{138}{92} = \frac{69}{46} = \frac{3}{2}$$

Die Diagonalen werden durch Z im Verhältnis $3:2$ unterteilt. Das bedeutet, es gibt fünf Teile, von denen drei auf der A- und zwei auf der C-Seite liegen. Für deren Längen ergibt sich folglich:

$$\overline{AZ} = \frac{3}{5}\cdot e = \frac{3}{5}\cdot 12.5\,\text{cm} = \underline{\underline{7.5\,\text{cm}}} \qquad \text{und} \qquad \overline{CZ} = \frac{2}{5}\cdot e = \frac{2}{5}\cdot 12.5\,\text{cm} = \underline{\underline{5\,\text{cm}}}$$

6. (a) Für den Streckfaktor zwischen kleinem und grossem Dreieck ergibt sich aus den Flächen:

$$A' = k^2\cdot A \quad\Rightarrow\quad k^2 = \frac{A'}{A} = \frac{75}{48} = \frac{25}{16} \quad\Rightarrow\quad k = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$$

$$c' = k\cdot c \quad\Rightarrow\quad c = \frac{c'}{k} = \frac{18\,\text{cm}}{\frac{5}{4}} = \frac{4\cdot 18\,\text{cm}}{5} = \underline{\underline{14.4\,\text{cm}}}$$

(b) Die reale Gebäudefläche beträgt:

$$A' = k^2\cdot A = 500^2\cdot 27.2\,\text{cm}^2 = 250\,000\cdot 27.2\,\text{cm}^2 = 6\,800\,000\,\text{cm}^2 = 680\,\text{m}^2$$

Dabei ist $1\,\text{m}^2 = (1\,\text{m})^2 = (100\,\text{cm})^2 = 10\,000\,\text{cm}^2$ resp. $1\,\text{cm}^2 = \frac{1}{10\,000}\,\text{m}^2$. Es folgt:

$$b = \frac{A}{l} = \frac{680\,\text{m}^2}{34\,\text{m}} = \underline{\underline{20\,\text{m}}}$$

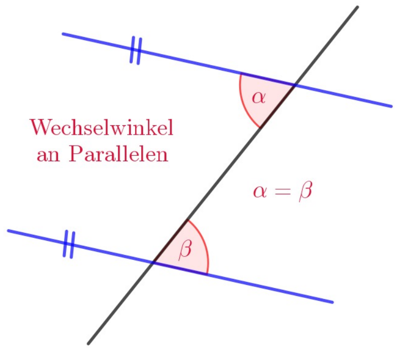
7. (a) **Beweis:**

i. Der Winkel ADC ist wiederum $\frac{\gamma}{2}$ (Wechselwinkel resp. Z-Winkel an parallelen Geraden).

ii. Damit ist aber das Dreieck ACD gleichschenklig und es gilt $\overline{AD} = b$.

iii. Nun folgt mit dem 2. Strahlensatz (Zentrum S, Parallelen $\overline{AD}$ und a) direkt, dass:

$$\frac{\overline{AD}}{a} = \frac{p}{q} \quad\Rightarrow\quad \frac{b}{a} = \frac{p}{q}$$



(b) **Aussage:** "In jedem beliebigen Dreieck unterteilt jede Winkelhalbierende die gegenüberliegende Dreiecksseite im Verhältnis der Längen der beiden am Winkel anliegenden Dreiecksseiten."

(c) Für die Katheten a und b des rechtwinkligen Dreiecks gilt gemäß der Aussage unter (b):

$$\frac{b}{a} = \frac{p}{q} = \frac{6}{4.5} = \frac{4}{3} \quad \text{resp.} \quad b = \frac{4}{3}a$$

Außerdem gilt der Satz des Pythagoras:

$$a^2 + b^2 = c^2 = (p+q)^2 = 10.5^2 = \left(\frac{105}{10}\right)^2 = \left(\frac{21}{2}\right)^2 = \frac{21^2}{2^2}$$

Mit $b^2 = (\frac{4}{3}a)^2 = \frac{16}{9}a^2$ folgt:

$$a^2 + \frac{16}{9}a^2 = \frac{9+16}{9}a^2 = \frac{25}{9}a^2 \stackrel{!}{=} \frac{21^2}{2^2} \quad\Rightarrow\quad a^2 = \frac{21^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 5^2}$$

Für a, b und die Dreiecksfläche erhalten wir daraus:

$$a = \frac{21\cdot 3}{2\cdot 5} = \frac{63}{10} \quad\Rightarrow\quad b = \frac{4}{3}a = \frac{84}{10}$$

$$A = \frac{a\cdot b}{2} = \frac{63}{10}\cdot\frac{84}{10} : 2 = \frac{63\cdot 42}{100} = \frac{2646}{100} = \underline{\underline{26.46\,\text{cm}^2}}$$